



Министерство науки и высшего образования РФ

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Тезисы докладов международной конференции

Нижний Новгород, 26 - 29 июня 2022 г.

Нижний Новгород
Издательство Нижегородского госуниверситета
2022

УДК 517.938(063)+517.935.4(063)

ББК 22.18я431

Д 46 **Динамические системы. Теория и приложения.** Тезисы докладов международной конференции (Н. Новгород, 26-29 июня 2022 г.) –Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2022.

Отв. за выпуск Д.В. Баландин

ISBN 978-5-91326-761-0

Сборник тезисов докладов международной конференции «Динамические системы. Теория и приложения», состоявшейся 26-29 июня 2022 г. на базе Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, содержит тезисы докладов, посвященные теории динамических систем и бифуркаций, математическому моделированию и изучению различных математических проявлений нелинейной динамики, а также приложениям теории в различных областях естествознания, экологии, медицины и техники.

Электронная версия сборника тезисов докладов на сайте:

<http://mathcenter.msite.unn.ru/konferentsiya/>

ISBN 978-5-91326-761-0

УДК 517.938(063)+517.935.4(063)

ББК 22.18я431

© Авторы статей, 2022

© ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2022

Содержание

<i>A. V. Andreev, A.A. Badarin, A.E. Hramov.</i> Using reservoir computing to predict chaotic macroscopic dynamics	7
<i>K. V. Anokhin.</i> Cognitive computing in neural hypernetworks	9
<i>B.M. Антипов, А.А. Бадарин, В.В. Грубов, В.Б. Казанцев, А.Е. Храмов.</i> Изучение различных характеристик нейрофизиологической активности во время тренировочного процесса	10
<i>A.M. Arefev, E.A. Grines, G.V. Osipov.</i> Heteroclinic cycles and chaos in system of four identical phase oscillators with biharmonic coupling	12
<i>E.M. Артемова, Е.В. Ветчанин.</i> Движение уравновешенного цилиндра в поле неподвижной точечной особенности	13
<i>A.A. Бадарин, В.В. Грубов, С.А. Куркин, А.Е. Храмов.</i> Изучение адаптационных механизмов головного мозга во время продолжительного решения когнитивных задач на базе fNIRS	14
<i>N.V. Barabash, V.N. Belykh, I.V. Belykh.</i> Piecewise-linear system allowing simple proof of Shilnikov chaos	16
<i>B. Н. Белых.</i> Аттракторы ряда конкретных динамических систем: локализация, структура, бифуркации	17
<i>I.V. Belykh.</i> Dynamical models of crowd-bridge interactions	20
<i>И.А. Бизяев, И. С. Мамаев.</i> Перманентные вращения трехосного эллипсоида	21
<i>A. V. Bukh, E.M. Elizarov, I.A. Shepelev, G. I. Strelkova.</i> Impact of the time delay on behaviour of coupled FitzHugh-Nagumo neurons	22
<i>M.I. Bolotov, L.A. Smirnov, G.V. Osipov, A. Pikovsky.</i> Destruction of synchronization in a chain of phase oscillators with a single defect	24
<i>H.A. Брусинский, А.А. Бадарин, А.Е. Храмов.</i> Изучение особенностей газодвигательный активности при решении задачи на рабочую память (парадигма Стернберга)	26
<i>S.A. Dovbysh.</i> Approximation theorem on integrals along contours on the complex plane and the non-integrability of a spherical pendulum with a periodically oscillating suspension point	27

<i>А.И. Эгамов.</i> Устойчивость оптимального графика переработки продукта	29
<i>Yu.M. Ishbulatov, T.S. Bibicheva, V.I. Gridnev, M.D. Prokhorov, M.V. Ogneva,</i>	
<i>A.R. Kiselev, A.S. Karavaev.</i> Investigating the source of complexity in the heart rate using a mathematical model of the cardiovascular system	32
<i>V.D. Galkin, O.V. Pochinka.</i> Spherical flow diagram with finite hyperbolic chain-recurrent set	34
<i>D.S. Golodobin, M. di Volo, L.S. Klimenko, A. Torcini.</i> Low-dimensional macroscopic dynamics of systems with weakly-non-Lorentzian distribution of states . .	35
<i>M.S. Gonchenko.</i> Reversible perturbations of conservative maps and mixed dynamics	37
<i>A.S. Gonchenko, A.G. Korotkov, E.A. Samylina.</i> On reversible systems with Lorenz attractors and repellers	38
<i>V.S. Khorev.</i> Study of the dynamics of a balance platform during a short-term training	39
<i>B.B. Клиньшов, С.Ю. Кириллов, В.И. Некоркин.</i> Среднеполевая динамика неоднородных нейронных сетей	40
<i>A.G. Korotkov, T.A. Levanova, G.V. Osipov.</i> Synchronous dynamics in small ensemble of nonidentical phase elements	42
<i>V.A. Koryakin.</i> Fast methods for construction of homoclinic and heteroclinic bifurcations diagrams and Lorenz-like attractors	44
<i>V.P. Kruglov, A.O. Kazakov, E.Yu. Karatetskaya, S.V. Gonchenko.</i> On new conjoined Lorenz-like attractor	46
<i>П.В. Купцов.</i> Моделирование нелинейной динамики при помощи искусственных нейронных сетей	47
<i>П.В. Купцов.</i> Анализ синхронизация спин-трансферных осцилляторов с одноосной симметрией и полевой связью в фазовом приближении . .	49
<i>A.V. Kurbako, V.V. Skazkina, E.I. Borovkova, A.S. Karavaev.</i> A methods for calculating cardiotintervalogram signals from a photoplethysmogram for analyzing the synchronization of the autonomic control loops of the cardiovascular system	51

<i>O.A. Кузенков.</i> Построение функции приспособленности в двустадийной модели популяционной динамики	53
<i>A.P. Kuznetsov, Yu.V. Sedova, N.V. Stankevich.</i> Complex dynamics of three coupled quasi-periodic generators	55
<i>M.I. Malkin.</i> Chaos for multidimensional perturbations of dynamical systems with small dimension	56
<i>I.A. Maruseev, A.E. Rassadin.</i> Exact solution of one integro-differential equation by means of operator semigroups	58
<i>B.S. Maryshev, L.S. Klimenko.</i> The effect of diffusion on the passive solute transport into an infinite two-dimensional array of vortices	61
<i>B.C. Метрикин, И.В. Никифорова.</i> О сложной динамике в сильно нелинейных (виброударных) системах	62
<i>М.А. Мищенко, А.В. Лебедева, А.В. Бельтюкова, Д.И. Большаков, В.И. Лукоянов, Д.С. Королев, А.И. Белов, Д.В. Гусейнов, В.В. Матросов, В.Б. Казанцев, А.Н. Михайлов.</i> Частотная зависимость переключений мемристивного устройства и его использование в задачах нейроморфной электроники	63
<i>K.E. Morozov.</i> Degenerate resonances and synchronization in nearly Hamiltonian systems under quasiperiodic perturbations	65
<i>О.И. Москаленко, А.А. Короновский, Е.В. Евстифеев, В.А. Ханадеев.</i> Особенности обобщенной синхронизации в системах с различной топологией аттрактора	66
<i>V.O. Munyayev, M.I. Bolotov, L.A. Smirnov, G.V. Osipov, I.V. Belykh.</i> Splay states in the second-order Kuramoto model	68
<i>E.N. Pivovarova, A.A. Kilin.</i> Dynamics of the Chaplygin sphere on a moving plane	70
<i>E.V. Rybalova, V.A. Nechaev, G.I. Strelkova.</i> Impact of noise on the existence of chimera states in networks of nonlocally coupled maps	72
<i>К.А. Сафонов К.А., А.О. Казаков^{1,2}, М.И. Малкин.</i> О гомоклинической бифуркации, приводящей к рождению аттрактора Ровеллы	74

<i>A.E. Samoilova, D.S. Goldobin.</i> Effect of global coupling on the synchronization of Josephson junctions by common noise	76
<i>B.B. Сказкина, К.А. Попов.</i> Анализ особенностей нестационарного поведения контуров автономной регуляции кровообращения у разных групп пациентов с Covid-19	77
<i>D.A. Smirnov.</i> Relating causality quantifiers for processes to oscillation-theoretic effects of directional couplings	79
<i>L.A. Smirnov, M.I. Bolotov, G.V. Osipov, A. Pikovsky.</i> Traveling chimeras in an oscillatory medium with advection-diffusion coupling	81
<i>N.M. Smirnov, S.A. Kurkin.</i> Analysis of human brain activity during motor function activation after rTMS	85
<i>K.A. Soldatkin.</i> Hyperchaotic attractors with three positive Lyapunov exponents in the three-dimensional Kaneko endomorphism	87
<i>S.V. Stasenko, V.B. Kazantsev.</i> Network regulation of neural activity by glial cells	88
<i>Ю.А. Цыбина, А.А. Заикин, С.Ю. Гордлееева.</i> Влияние астроцитов на процессы обработки и хранения информации в спайковой нейронной сети	90
<i>I.V. Tyulkina, D.S. Golodobin.</i> Phase description for oscillatory Soret-driven convection in adjoined porous cells	92
<i>A. Vieiro.</i> Exploring the dynamics after the transition to complex-saddle	93
<i>К.С. Заичиков, А.С. Гонченко.</i> Об аттракторах лоренцевского типа в трехмерном отображении с лоренцевской симметрией	94
<i>A. Zaikin.</i> Intelligence and consciousness in genetic-neuron astrocyte networks	98
<i>A. Zinovyev, A.N. Gorban, E.M. Mirkes.</i> Dynamical systems and Big synchronic data in biomedicine: pseudotime, bifurcations and principal graphs	100
<i>N.I. Zhukova.</i> Countable products of chaotic homomorphism groups	101
<i>N.I. Zhukova, N.S. Tonysheva.</i> Chaotic suspended foliations on three-dimensional manifolds	102

Using reservoir computing to predict chaotic macroscopic dynamics

A. V. Andreev^{1,2}, A. A. Badarin^{1,2}, A. E. Hramov^{1,2}

¹ *Neuroscience and Cognitive Technology Laboratory,*

Innopolis University, Innopolis, Russia

² *Center for Neurotechnology and Machine Learning,*

Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia

andreevandrei1993@gmail.com

Nowadays, the problem of forecasting complex signals is significant and has many applications in real life. One of such applications is the prediction of neurophysiological signals [1], like EEG. Such signals are macroscopic signals of a group of neurons, and the connections between them adapt in time.

Signals received from real systems often exhibit chaotic (or close to it) dynamics that is difficult to predict. Recurrent Neural Networks (RNNs) offer a potential method for addressing these challenges. The most promising type of RNN for solving this task is Reservoir Computing (RC) [2, 3, 4].

An important task is to predict the macroscopic dynamics of complex network systems often encountered in real life. An example of such a system is adaptive neural networks in biological objects, such as human brain. In experimental studies, the signals recorded from the head's surface are, in essence, macroscopic signal from a particular network of neurons. Prediction of such signals is important for timely response to possible negative developments in their dynamics.

In this work, we address the question of using RC to forecast the dynamics of the adaptive network, which topology changes in time, so the averaged signal of the network is evolving and propose an approach to increase the quality of prediction. As a model, we use a network of Kuramoto phase oscillators with an adaptation of couplings [5]. We show that the dynamics of the signal is chaotic, and RC cannot predict it.

To improve the prediction quality, we apply the reconstruction of the phase space of the investigated signal by adding the delayed signals to the original one. Such an approach significantly improves the quality of the signal's prediction. Then, we investigate how a number of delayed signals influence the quality of prediction and find the optimal number of the delayed signals is 2 which corresponds to the embedding dimension. We also find that 2 delays provide the most long accurate prediction, but for correct short-time prediction we need to use 8 or 6 delays depending on the duration of the prediction.

We find that the optimal number of delays depends on the time we need to predict for: the more time we need to predict for, the less input signals we need to use. The reason is increasing of the number of delays has a positive and negative impact: more delays give more information about the signal to the reservoir but contribute to a faster increase in error during the iterative process.

The work was supported by the by the President Program (Grants No. MK-580.2022.1.6 and NSh-589.2022.1.2.).

- [1] D. Bzdok, J. P. A. Ioannidis. Trends in neurosciences, 42(4), 251-262 (2019).
- [2] P. R. Vlachas et al. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 474(2213), 20170844 (2018).
- [3] J. Pathak et al. // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 28(4), 041101 (2018).
- [4] A. Griffith, A. Pomerance, D. J. Gauthier // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 29(12), 123108 (2019).
- [5] V. V. Makarov et al. Chaos, Solitons & Fractals, 84, 23-30 (2016).

Cognitive computing in neural hypernetworks

K. V. Anokhin¹

¹ Institute for Advanced Brain Studies, Lomonosov Moscow State University, Russia

kanokhin@gmail.com

The term cognitive computing has been used to refer to new hardware and/or software that mimics the functioning of the animal and human brain. Its goal is more accurate models of how the brain and mind senses, reasons, and guides behavior. Cognitive computing generally adopts a neuromorphic engineering approach which emulates a network of neurons. However, accumulating neuroscience data suggest that cognition is function not of a neural network, but of a higher order neural structure called neural hypernetwork [1]. The vertices of the neural hypernetwork are functionally coupled subsets of vertices from the underlying neural network that acquire a cognitive cause-effect power. In terms of algebraic topology such cognitive groups (cogs) are relational simplexes or hypersimplexes. The base of a neural hypersimplex is the simplex from vertices of the underlying N network, and its apex is the vertex with a new quality at the higher-level N+1 system. Hypernetworks generalize networks and hypergraphs, provide formalism for description of emergent phenomena in the multi-level systems, and allow modeling much more complex structures than networks and hypergraphs. The neural hypernetwork theory (NHT) states that cognition should be understood as dynamics in this higher-order system, and that we cannot explain cognitive system behavior without thoroughly accounting for neural hypernetwork topology and its impact on system dynamics. I will demonstrate that the structure of the neural hypernetwork implies not only linear causal interactions required for logic and computing, but also deep nonlinear effects that can underlie insights and intuition. The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Grant No. 075-15-2020-801).

[1] K.V. Anokhin 9th IBRO World Congress of Neuroscience 706/613D (2015).

Изучение различных характеристик нейрофизиологической активности во время тренировочного процесса

В. М. Антипов¹, А. А. Бадарин^{1,2},

В. В. Грубов^{1,2}, В. Б. Казанцев^{1,2}, А.Е. Храмов^{1,2}

¹ *Лаборатория нейронауки и когнитивных технологий,*

Центр технологий в робототехнике и мехатронные компоненты,

Университет Иннополис, Иннополис, Россия

² *Балтийский центр нейротехнологий и искусственного интеллекта,*

Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта,

Калининград, Россия

vantipovt@gmail.com

Одной из важнейших задач спорта высших достижений является повышение эффективности и качества тренировок. С каждым годом повышается уровень требований к индивидуальным показателям эффективности каждого спортсмена. Это неминуемо приводит к появлению травм и другим отрицательным эффектам, [1, 2] которые негативно сказываются на спортивных результатах. Для решения этой проблемы необходимо создавать более эффективные и высокотехнологичные программы тренировок, которые будут включать в себя как внешний контроль правильности выполнения упражнений, так и корректировку методики тренировки за счет предварительного исследования и анализа различных мультимодельных данных всего комплекса физиологических состояний человека [3, 4].

Комплексный подход к решению проблемы индивидуализации тренировочного процесса должен позволить создать оптимальную ассистирующую мультимодальную систему мониторинга, применение которой приведет к увеличению индивидуальных показателей спортсмена и повысит уровень безопасности тренировок.

В данной работе представлены результаты анализа мультимодальных данных, полученных в ходе нейрофизиологического эксперимента, эмитирующего тренировочный процесс по спортивной стрельбе.

Для проведения комплекса измерений был разработан и проведен эксперимент аналогичный спортивной дисциплине “биатлон”. Суть эксперимента заключается в регистрации различных мультимодальных данных в процессе прицеливания и выстрела. В эксперименте приняли участие 21 человек в возрасте от 18 до 25 лет, все испытуемые мужского пола. На каждого испытуемого были установлены датчики ЭКГ, ЭЭГ, ЭМГ и ЭОГ.

Следует отметить, что одной из проблем при обработке сигналов с датчиков, расположенных на подвижных частях человеческого тела, является зашумленность сигналов. Также проблему усугубляет тот факт, что зоны крепления датчика взаимодействуют с различными объектами во время выполнения спортивных упражнений. Для решения данных проблем были использованы различные методы фильтрации, в том числе метод вейвлетных преобразований [5, 6].

Анализ полученных данных позволил выделить наиболее значимые групповые и индивидуальные особенности нейронной и мышечной активностей, ассоциированных с выполнением различных типов задач, связанных с тренировочным процессом. Для выявления различных состояний нейронной активности головного мозга были использованы методы частотно-временного анализа экспериментальных мультимодальных сигналов (ЭЭГ, ЭКГ, ЭМГ и ЭОГ).

Работы по анализу данных поддержаны Советом по грантам Президента Российской Федерации (грант НШ-589.2022.1.2.)

- [1] Т.Т. Edwards et al. // Sports. 6, No. 1. 19. (2018).
- [2] X.J. Schelling et al. // The Journal of Strength and Conditioning Research. 29. No. 2. PP. 368-378. (2015).
- [3] M.A. Boksem et al. // Cognitive brain research. 25. PP. 107-116. (2005).
- [4] M.M. Lorist et al. // Cognitive Brain Research. 24. No. 2. PP. 199-205. (2005).
- [5] Д.И. Андрианов // Радиоэлектроника. Проблемы и перспективы развития. 7. (2018).
- [6] В.И. Дубровин // Радіоелектроніка, інформатика, управління. 1. (2014).

Heteroclinic cycles and chaos in system of four identical phase oscillators with biharmonic coupling

A.M. Arefev¹, E.A. Grines¹, G.V. Osipov¹

¹ Department of Control Theory, Nizhny Novgorod State University, Russia

evgenij.grines@gmail.com

Coupled phase oscillators are known examples of systems that exhibit a variety of dynamic behaviours: synchrony, chaos, chimera states and mixed dynamics. When oscillators and interactions between them are identical, the coupling function becomes the main source of complexity. Due to results by Watanabe and Strogatz, Kuramoto-Sakaguchi coupling allows only simple behaviour, while using a biharmonic coupling function, which includes only first two harmonics, opens up possibilities for chaos when number of oscillators is greater than 5. However, previously there were no numerical evidences that such coupling leads to chaos for systems of four phase oscillators. In this talk we discuss an approach for searching chaotic attractors close to heteroclinic cycles of this system. We also discuss few scenarios that lead to birth of chaos. This study was supported by Ministry of Science and Higher Education of Russian Federation, contract 0729-2020-0036.

Движение уравновешенного цилиндра в поле неподвижной точечной особенности

Е. М. Артемова¹, Е. В. Ветчанин¹

¹ Удмуртский государственный университет, Уральский математический центр,
Кафедра теоретической физики, Ижевск, Россия
liz-artemova2014@yandex.ru

Исследование движения твердых тел в присутствии точечных вихрей является классической задачей, которая изучалась, например, в [1, 2, 3]. Помимо точечных вихрей рассматривают влияние других точечных особенностей на движение твердого тела. В работе [4] рассматривалось плоскопараллельное движение цилиндра со смещенным центром масс в присутствии точечного источника/стока. Было показано, что в случае уравновешенного цилиндра задача является интегрируемой. Неинтегрируемость задачи движения цилиндра со смещенным центром масс была показана через отображение рассеяния.

Мы продолжаем исследование влияния неподвижных точечных особенностей на движение твердых тел в жидкости. В данной работе мы предполагаем, что у цилиндра имеется собственная циркуляция, а вместо источника рассматриваем неподвижный вихреисточник. В частном случае, когда обильность вихреисточника равна нулю (неподвижный вихрь), оказываются возможными два типа движения цилиндра: падение на особенность и периодическое движение вокруг нее. При ненулевой обильности вихреисточника пропадает периодический тип движения и появляется возможность ухода цилиндра на бесконечность. Построены карты начальных условий с областями ухода цилиндра на бесконечность и притяжения к особенности.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (FEWS-2020-0009).

- [1] Ramodanov, S. M., Motion of a Circular Cylinder and a Vortex in an Ideal Fluid, Regul. Chaotic Dyn., 2001, vol. 6, no. 1, pp. 33–38.

- [2] Mamaev, I. S. and Bizyaev, I. A., Dynamics of an Unbalanced Circular Foil and Point Vortices in an Ideal Fluid, *Phys. Fluids*, 2021, vol. 33, no. 8, 087119, 18 pp.
- [3] Shashikanth, B. N., Marsden, J. E., Burdick, J.W., and Kelly, S. D., The Hamiltonian Structure of a 2D Rigid Circular Cylinder Interacting Dynamically with N Point Vortices, *Phys. Fluids*, 2002, vol. 14, pp. 1214–1227.
- [4] Artemova E. M., Vetchanin E. V., The Motion of an Unbalanced Circular Disk in the Field of a Point Source, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2022, vol. 27, no. 1, pp. 24-42

**Изучение адаптационных механизмов головного мозга во
время продолжительного решения когнитивных задач на
базе fNIRS**

А. А. Бадарин^{1,2}, В.В. Грубов^{1,2}, С.А. Куркин^{1,2}, А.Е. Храмов^{1,2}

¹ *Лаборатория нейронауки и когнитивных технологий,*

Университет Иннополис, Иннополис, Россия

² *Балтийский центр нейротехнологий и искусственного интеллекта,*

Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта,

Калининград, Россия

Badarin.a.a@mail.ru

Понимание физических механизмов и закономерностей работы функциональных сетей мозга играет одну из ключевых ролей в понимании работы мозга в целом и является одной из наиболее важных и актуальных проблем современной нейронауки. В частности, сейчас активно развиваются научные направления, связанные с выявлением механизмов динамической реорганизации функциональной сети головного мозга при выполнении когнитивных функций. Организация функциональной

сети мозга крайне динамична, что позволяет ей формировать и перестраивать свою топологию для восприятия и обработки внешних и внутренних стимулов, адаптируясь к изменяющимся условиям [1].

Такая адаптация и динамичность в формировании связей между удаленными группами нейронов может объяснить разнообразную функциональность мозга и обеспечить гибкий механизм, позволяющий, в частности, сохранять высокую производительность при продолжительной когнитивной нагрузке, а также быстро переключаться между разными типами задач [2].

Нарушения в работе данных механизмов могут приводить к различным неврологическим заболеваниям или быть следствием развития нейродегенеративных заболеваний, таких как болезнь Альцгеймера, деменция и многих других [3].

В свою очередь, детектирование таких нарушений играет важную роль в раннем диагностировании этих заболеваний. Следует отметить, что несмотря на обширные исследования, направленные на изучение функциональной сети мозга, в настоящее время мало известно о механизмах адаптации топологии кортикальной сети мозга к длительной нагрузке.

В настоящей работе представлены результаты анализа изменения характеристик, выявленных функциональных сетей, в процессе длительного и непрерывного выполнения когнитивных задач, основанной на парадигме Стернберга, а также определены их взаимосвязи с поведенческими характеристиками добровольцев на базе корреляционного анализа и выявлены биомаркеры усталости.

Работы по разработке методов и проведению нейрофизиологических экспериментов выполнены при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации (грант МК-2142.2022.1.2). Работы по анализу данных поддержаны Советом по грантам Президента Российской Федерации (грант МД-590.2022.1.2).

[1] Y. Zhang, C. Zhu, *Frontiers in neuroscience*, 13, p.143,(2020)

[2] J. Gonzalez-Castillo, P.A. Bandettini, *Neuroimage*, 180, pp.526-533 (2018).

[3] M. Pievani, N. Filippini, M.P. Van Den Heuvel, S.F. Cappa, G.B. Frisoni, *Nature Reviews Neurology*, 10(11), pp.620-633 (2014).

Piecewise-linear system allowing simple proof of Shilnikov chaos

N. V. Barabash^{1,2}, V. N. Belykh^{1,2}, I. V. Belykh^{1,3}

¹ Department of Control Theory, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia
barabash@itmm.unn.ru

² Department of Mathematics, Volga State University of Water Transport,
Nizhny Novgorod, Russia,

³ Department of Mathematics and Statistics, Georgia State University, Atlanta, USA

In this talk, we consider a 3D piecewise linear ODE system with a homoclinic loop to a saddle-focus, which was constructed using the technique presented in papers [1, 2, 3]. This system is composed from linear subsystems A_0 , A_l and A_r

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x, \\ A_0 : \quad \dot{y} &= -\nu y + \omega z, \\ \dot{z} &= -\omega y - \nu z, \\ \dot{x} = -\alpha(x + h) - \Omega(z + 1), \quad &\quad \dot{x} = -\alpha(x - h) - \Omega(z - 1), \\ A_l : \quad \dot{y} = -\beta y, \quad &\quad A_r : \quad \dot{y} = -\beta y, \\ \dot{z} = \Omega(x + h) - \alpha(z + 1), \quad &\quad \dot{z} = \Omega(x - h) - \alpha(z - 1), \end{aligned} \tag{1}$$

where h , α , β , ν , ω and Ω are positive parameters. Subsystems A_0 , A_l and A_r are defined in domains G_0 , G_l and G_r , respectively, such that $G_0 = (|x| < h, (y^2 + z^2 \leq r^2) \cap (|z| < 1))$, $G_l = (x \leq -hz, y \in \mathbb{R}) \setminus G_0$, $G_r = (x > -hz, y \in \mathbb{R}) \setminus G_0$ for some positive parameter $r > 1$. The construction is presented in Fig. 1.

In this talk, we formulate and prove the following

Theorem (Poincaré global cross-section)

Union of rectangles $D = D_l \cup D_r$, such that

$$\begin{aligned} D_l &= (|x| \leq h, |y| \leq \sqrt{r^2 - 1}, z = -1), \\ D_r &= (|x| \leq h, |y| \leq \sqrt{r^2 - 1}, z = 1) \end{aligned} \tag{2}$$

is the Poincaré global cross-section of system (1) for parameter region

$$r < \sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2}, \quad 2h\Omega < \alpha < \beta, \quad \alpha > -\frac{2\Omega}{3\pi} \ln h, \quad \sqrt{1 - \frac{1}{r^2}} > \exp\left(\frac{-3\pi\beta}{2\Omega}\right). \tag{3}$$

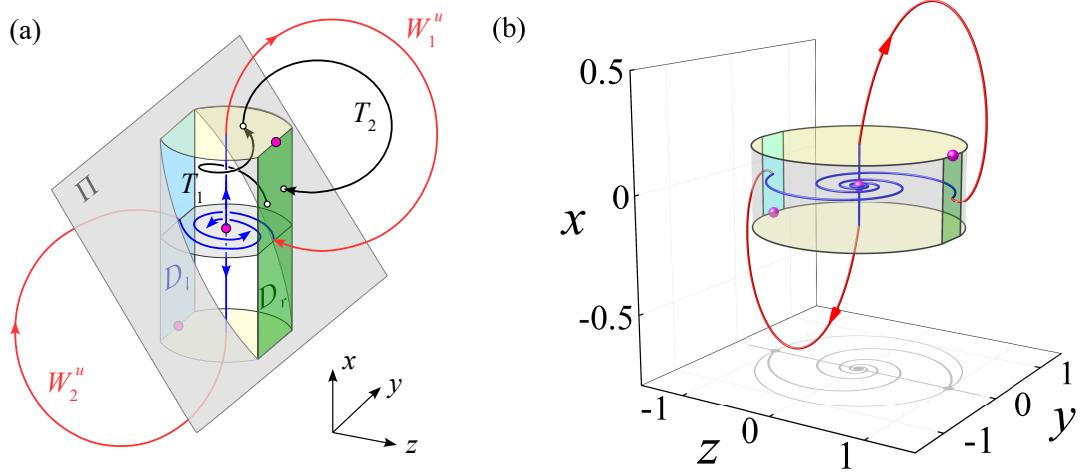


Рис. 1: (a) Qualitative scheme of the construction of system (1). (b) Symmetrical homoclinic orbits of the saddle-focus of system (1) for parameters $\Omega = 1$, $\nu = 0.75$, $\omega = 3$, $h = 0.172883$, $\alpha = 0.372452$, $r = 1.01539$, $\beta = 0.371774$.

Using this Theorem and integrability of linear subsystems A_0 , A_l and A_r , we obtain 2-D global Poincaré return map $F : D \rightarrow D$ in explicit form. Analysis of this map allows us to:

- a) reveal the existence of countable set of Smale horseshoe in D , proving the existence of Shilnikov chaos;
- b) prove the existence of an attractor of system (1) and show it localization;
- c) describe the structure of the attractor.

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under Grant No. 0729-2020-0036, by the Russian Science Foundation under Grant No. 22-21-00553 (to V.N.B. and N.V.B.),

- [1] V.N. Belykh, N.V. Barabash, I.V. Belykh. Chaos, V.29, No. 10, 2019, P. 103108.
- [2] V.N. Belykh, N.V. Barabash, I.V. Belykh. Automation and Remote Control. V. 81, No. 8, 2020, P. 1385–1393.
- [3] V.N. Belykh, N.V. Barabash, I.V. Belykh. Chaos, V. 31, No. 4, 2021, P. 043117.

Аттракторы ряда конкретных динамических систем: локализация, структура, бифуркации

В. Н. Белых

Кафедра математики,

Волжский государственный университет водного транспорта

Нижний Новгород, Россия,

Кафедра теории управления и динамики систем,

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Россия

belykh@unn.ru

В работе обсуждаются аттракторы трёх систем дифференциальных уравнений.

Первая из них это система вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -l(u)g(x) - \lambda(x, u)y + f(u), \\ \dot{u} &= G(x, y, u),\end{aligned}$$

представляющая собой управляемый нелинейный осциллятор, где l , λ , f – соответственно функции эластичности, затухания и внешней силы, а переменная u определяет управление. В простейшем случае $G \equiv 0$ эта система есть однопараметрическое семейство систем на плоскости, а при $G \equiv 1$ система становится неавтономной.

Вторая система вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= -f(x) - ay - z\end{aligned}$$

при кусочно-линейной функции $f(x)$ и $a = 1.25$ – модель хаотической динамики Р. Брокета [1], при $f(x) = mxe^{-x^2}$ – модель генератора Дмитриева-Кислова [2], а при произвольном виде $\dot{z} = Z(x, y, z)$ приобрела широко известное название “jerk equations”.

Третья система вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bF(\sigma), \\ \sigma &= c^T x,\end{aligned}$$

где $A - n \times n$ матрица, $F : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, это система с одной нелинейностью Лурье, к которой сводятся известные системы фазовой синхронизации [3], система Чуа [4] и др.

Демонстрируются различные способы построения поглощающих областей, определяющих локализацию аттракторов. Приводятся примеры этих систем, для которых указываются способы исследования хаотических компонент и бифуркаций неблуждающего множества, определяемые рождением подков Смейла и теоремами Шильникова.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №. 22-21-00553.

- [1] R. Brocket. On conditions leading to chaos in feedback systems. 1982 21-st IEEE Conference on Decision and Control. – IEEE, 1982. – C. 932-936.
- [2] А.С. Дмитриев, А.И. Панас, Е.В. Ефремова, Н.А. Максимов. Генерация хаоса / Под общ. ред. Дмитриева А.С. Москва: Техносфера, 2012. – 424 с.
- [3] В.Н. Белых, В.И. Некоркин. О качественном исследовании многомерной фазовой системы. Сиб. матем. журн., 18:4 (1977), 723–735.
- [4] L. Chua , M. Komuro, T. Matsumoto. The double scroll family. IEEE transactions on circuits and systems. – 1986. – Т. 33. – №. 11. – С. 1072–1118.

Dynamical models of crowd-bridge interactions

Igor V. Belykh^{1,2}

¹*Department of Mathematics and Statistics & Neuroscience Institute,
Georgia State University, P.O. Box 4110, Atlanta, Georgia, 30302-410, USA*

²*Department of Control Theory, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia
ibelykh@gsu.edu*

In this talk, I will discuss recent advances and challenges in modelling complex dynamics of pedestrian-bridge interactions. These challenges include a proper understanding of the biomechanics of walking on a moving structure and of the psychology of walking in crowds. I will explain the fundamental mechanism behind pedestrian-induced lateral instability of bridges due to some positive feedback from uncorrelated walkers whose foot forces do not cancel each other but create a bias. I will also present the results of our past [1] and recent work [2] that reveal the role of foot placement strategies and social force dynamics in initiating bridge instabilities. In particular, I will show that (i) paradoxically, depending on the human balance law (and the frequency of bridge motion), larger crowds can stabilize bridge motions and (ii) crowd heterogeneity can promote large vibrations of bridges.

- [1] I. Belykh, R. Jeter, and V. Belykh, *Science Advances*, 3, 11, e1701512 (2017).
- [2] I. Belykh, M. Bocian, A. Champneys, K. Daley, R. Jeter, J. Macdonald, and A. McRobie, *Nature Communications*, 12, 7223 (2021).

Перманентные вращения трехосного эллипсоида

И. А. Бизяев¹, И. С. Мамаев¹

¹ Удмуртский государственный университет,
ул. Университетская 1, 426034, г. Ижевск,

bizaev_90@mail.ru

Рассмотрим задачу о качении твердого тела по горизонтальной плоскости в поле тяжести при условии, что в точке контакта отсутствует проскальзывание. Уравнения описывающие эволюцию угловой ω и нормали к плоскости в точке контакта γ образуют замкнутую систему:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + mg\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \tilde{\mathbf{I}} &= \mathbf{I} + mr^2\mathbf{E} - m\mathbf{r} \otimes \mathbf{r},\end{aligned}\tag{1}$$

где \mathbf{I} и m – центральный тензор инерции и масса тела, g – ускорение свободного падения. Вектор \mathbf{r} – это вектор из центра масс тела в точку контакта P , который для тела имеющего форму трехосного эллипсоида представляется в следующей форме

$$\mathbf{r} = -\frac{\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{(\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})}}, \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, b_3).$$

Перманентными вращениями называют такие движения твердого тела, когда его угловая скорость остается постоянной, поэтому данные решения являются неподвижными точками системы (1). Для них из второго уравнения получим $\boldsymbol{\omega} = \omega_0\boldsymbol{\gamma}$, а первое уравнение приводится к форме

$$(\omega_0^2\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma} - m(\omega_0^2(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}) - g)\mathbf{r}) \times \boldsymbol{\gamma} = 0.$$

С геометрической точки зрения, это уравнение обозначает, что если \mathbf{r} не является собственным вектором тензора \mathbf{I} и $\omega_0^2(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}) - g \neq 0$, то три вектора $\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}$, \mathbf{r} лежат в одной плоскости. Следовательно, направляющие векторы осей перманентных вращений лежат на пересечении двух поверхностей

$$\begin{aligned}(\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{r}(\boldsymbol{\gamma})) &= \Delta\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 0, \\ \Delta &= I_1(b_2 - b_3) + I_2(b_3 - b_1) + I_3(b_1 - b_2).\end{aligned}\tag{2}$$

Таким образом для эллипсоида справедливо следующее:

- если $\Delta \neq 0$, то поверхность состоит из трех координатных плоскостей, при этом, если вектор γ лежит в координатной плоскости, то угловая скорость вращения задается соотношением

$$\gamma_k = 0, \quad \omega_0^2 = g(\gamma, \mathbf{B}\gamma)^{-1/2} \left(\frac{I_i - I_j}{m(b_i - b_j)} - 1 \right)^{-1}, \quad (3)$$

где i, j, k образуют циклическую перестановку, если γ лежит на координатной оси, то ω_0 — произвольна;

- если $\Delta = 0$ тогда возможно любое направление оси вращения, выражение для угловой скорости остается тем же (3). Подробно проанализирована устойчивость в линейном приближении в этом случае;
- вращения вокруг координатных осей ($\gamma_i = 1, \gamma_j = \gamma_k = 0$) возможны с произвольной угловой скоростью ω_0 (как при $\Delta = 0$, так и при $\Delta \neq 0$).

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 21-71-10039).

Impact of the time delay on behaviour of coupled FitzHugh-Nagumo neurons

A. V. Bukh^{1,2}, E. M. Elizarov¹, I. A. Shepelev¹, G. I. Strelkova

¹ Institute of Physics, Saratov State University, Saratov, Russia

² buh.andrey@yandex.ru

We study the impact of a time delay on behaviour of coupled FitzHugh-Nagumo neurons in an excitable regime. We consider the FitzHugh-Nagumo oscillator which is one of the basic system modelling neuronal dynamics, and determined by the follows equations:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = f(x) = x - x^3/3 - y \\ \dot{y} = g(y) = \gamma x - y - \beta, \end{cases} \quad (1)$$

where x and y are the dimensionless variables. The system (1) can operate in three regimes, namely, self-sustained oscillatory, excitable and bistable, depending on its parameter values as described in [1]. In this paper we fix $\varepsilon = 0.01$ and $\beta = 0.5$ which set excitable regime in the single FitzHugh-Nagumo neuron for $\gamma \in (0.2 : 1.1)$ [1]. Phase portrait of single oscillator without coupling is stable node. Projections of a phase portrait on the partial neurons in ensembles of the coupled FitzHugh-Nagumo oscillators without delay are also stable nodes for any values of coupling strength in (0:1). But the introduction of delay in the coupling between neurons leads to the excitation of oscillations in single neurons. Herewith we vary parameter γ , the time delay and the coupling strength value.

The reported study was funded by the Russian Science Foundation (project No. 20-12-00119).

- [1] I. Shepelev, D. Shamshin, G. Strelkova, T. Vadivasova, *Chaos, Solitons & Fractals* 104(1), 153-160 (2017).

Destruction of synchronization in a chain of phase oscillators with a single defect

M. I. Bolotov¹, L. A. Smirnov¹, G. V. Osipov¹, A. Pikovsky²

¹ *Scientific and Educational Mathematical Center “Mathematics of Future Technologies”, Department of Control Theory, Nizhny Novgorod State University, Russia*

² *Institute for Physics and Astronomy, University of Potsdam, Germany
maksim.bolotov@itmm.unn.ru*

Systems of coupled oscillators are still a hot topic for theoretical and experimental research. This is because these systems are basic models in various modern science and technology fields. A number of key fundamental phenomena inherent in nonlinear oscillatory media of a different nature can be studied within the framework of the phase approximation. Synchronization in its multifaceted manifestations, in particular, belongs to such phenomena. In the simplest situation, lattices with only a local connection between neighboring elements are usually considered. We note that a number of interesting results of the initial studies of such systems are presented in the book [1]. There are two large classes of oscillatory ensembles studied in the literature. We are talking about regular and unordered chains. Here we consider the case when there is one element in the chain, the individual characteristics of which differ from the rest.

We considered the lattice consisting of N phase oscillators with a nearest-neighbour coupling [2]. In this case the evolution of the phase φ_n of each unit is given by the following equation

$$\dot{\varphi}_n = \omega_n + \sin(\varphi_{n+1} - \varphi_n + \alpha) + \sin(\varphi_{n-1} - \varphi_n + \alpha) - 2 \sin \alpha, \quad (1)$$

where natural frequencies ω_n are given as follows: $\omega_n = 0$ for $n \neq m$ and $\omega_m = \sigma$ for $n = m$ (m is the position of a defect element). Phase shift α determines whether the interaction between elements is attractive, repulsive or neutral. It is natural to set the boundary conditions as follows:

$$\varphi_0 - \varphi_1 = 0, \quad \varphi_N - \varphi_{N+1} = 0. \quad (2)$$

During the study, several classes of frequency-synchronous modes were found using analytical methods. Their stability was determined. It is shown that there is multistability of these regimes. For small values of the phase shift parameter $\alpha < 1.2$, the destruction of the synchronous mode leads to the rotation of the element with a defect relative to other elements that remain synchronous in frequency. At values of the phase shift parameter $1.2 < \alpha < 1.5$, when the synchronization is destroyed, waves begin to propagate in the chain, the reflection of which further leads to the implementation of the spatiotemporal chaos mode. At large values of the $1.5 < \alpha < \pi/2$, the system shows spatiotemporal chaos when the synchronous regime is destroyed.

The work was supported by the Russian Science Foundation (Grant No. 22-12-00348, numerical analysis), the Scientific and Education Mathematical Center “Mathematics for Future Technologies” (Project No. 075-02-2022-883, analytical analysis of synchronous regimes).

- [1] Afraimovich V. S., Nekorkin V. I., Osipov G. V., Shalfeev V. D. Stability, structures and chaos in nonlinear synchronization networks, World Scientific, Singapore, 1994.
- [2] M.I. Bolotov, T.A. Levanova, L.A. Smirnov, A. Pikovsky, Cybernetics and Physics 8(4), 215–221 (2019).

Изучение особенностей глазодвигательной активности при решении задачи на рабочую память (парадигма Стернберга)

Н.А. Брусинский¹, А.А. Бадарин^{1,2}, А.Е. Храмов^{1,2}

¹ *Лаборатория нейронауки и когнитивных технологий,*

Университет Иннополис, Иннополис, Россия

² *Балтийский центр нейротехнологий и искусственного интеллекта,*

Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта,

Калининград, Россия

Nikita@brusinskii.ru

Изучение принципов и физических закономерностей работы головного мозга является одной из наиболее важных и активно исследуемых задач современной науки. Одним из наиболее перспективных инструментов для изучения активности головного мозга является айтрекер[1, 2]. Он позволяет получить доступ к быстрым и неосознанным внутренним формам активности. Наиболее полезными применениями айтрекера на данный момент считаются области, связанные с нейромаркетингом и обучением. В данной работе был проведён эксперимент, основанный на длительной когнитивной нагрузке, аналогичной учебному процессу. Основными поведенческими характеристиками, исследуемыми в данном эксперименте, были память и усталость.

Данный эксперимент состоял из 4 блоков заданий в форме теста Стернберга[3], до и после которых проводили тесты, предназначенные для оценки субъективной усталости самим испытуемым. Тест Стернберга был реализован в форме последовательной демонстрации следующих визуальных сигналов: демонстрации белого креста; демонстрации набора букв; фона (черного экрана) длительностью в несколько секунд; пробы в форме буквы, относительно которой испытуемый принимал решение, была ли она в демонстрируемом недавно наборе букв или нет; фона.

Проведен детальный статистический анализ и обнаружен ряд поведенческих и физиологических особенностей человека во время прохождения экспериментальных

заданий. В частности, обнаружены изменение количества морганий и субъективной оценки усталости; процента совершаемых ошибок; амплитуды зрачка и его среднего размера. Также проведен корреляционный анализ и обнаружен ряд взаимосвязей между такими параметрами, как количество морганий определенной длительности, количество ошибок определенной сложности и субъективной усталости.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации (МК-2142.2022.1.2 и НШ-589.2022.1.2.)

- [1] R. S. Hessel, I. T. Hooge // Dev. Cogn. Neuro. 2019. 40.
- [2] R. Schweitzer, M. Rolfs // Science Advances. 2021. V. 7 No 30
- [3] Klabes, J., Babilon, S., Zandi, B. et al // Vision. 2021. V.5. P.21.

Approximation theorem on integrals along contours on the complex plane and the non-integrability of a spherical pendulum with a periodically oscillating suspension point

S. A. Dovbysh^{1,2}

¹ Advanced Educational Scientific Center of Moscow State University, Moscow, Russia

² N.E.Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

s.dovbysh@yandex.ru

A finite collection of functions of complex argument ranging some domain in \mathbb{C} is said to possess *property* (*) if any their non-trivial linear combination (i.e., one whose coefficients are not all equal to zero) is a function having an unremovable singularity.

Basic Approximation Theorem. *Let*

$$f_i(t) = \sum_{n \in N_i} f_i^{(n)} e^{nt}, \quad 1 \leq i \leq I,$$

be series convergent for small e^t , where $N_i \subset \mathbb{N}$ is infinite arithmetic progressions such that $f_i^{(n)} \neq 0$ for all $n \in N_i$, except for, maybe, a finite set. Assume that each of the progressions N_i contain an infinite collection of terms not belonging to any other progression. Finally, let functions $a_{ij}(t)$ and $b_{ij'}(t)$ ($1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J_i, 1 \leq j' \leq J'_i$) be holomorphic in some connected region $D \subset \mathbb{C}$ and possess a period $T \in \mathbb{C}$ such that $\operatorname{Re} T \neq 0$, and let a collection of functions $a_{ij}(t)$ ($1 \leq j \leq J_i$) for each i possesses in D property (*). One can assume that the domain D is T -periodic. For any oriented closed contour $\Gamma \subset D$ we introduce notations

$$g_{ij}[\Gamma](t') = \oint_{\Gamma} f_i(t+t') a_{ij}(t) dt,$$

$$h_{ij'}[\Gamma](t') = \oint_{\Gamma} f_i(t+t') b_{ij'}(t) dt.$$

Then for any complex t_* and c_{ij} ($1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J_i$), real positive $\varepsilon_*, \varepsilon$, and a bounded domain $V \subset \mathbb{C}$, there are a number $t'_* \in \mathbb{C}$, satisfying the inequality $|t'_* - t_*| \leq \varepsilon_*$, and a closed contour $\Gamma \subset D$ such that

$$|C^{-1}g_{ij}[\Gamma](t'_*) - c_{ij}| \leq \varepsilon,$$

$$|C^{-1}h_{ij'}[\Gamma](t')| \leq C_1 \quad \text{for } t' \in V$$

for all i, j, j' with some constants C and C_1 , where t'_* does depend on t_* and ε_* only, while C_1 is independent of ε . Moreover, one can choose t'_* to be any number such that $\operatorname{Im} t'_* \notin M$, where $M \subset \mathbb{R}$ is some locally finite (i.e., possessing no finite limit points) set which only depends on original functions $f_i(t)$, $a_{ij}(t)$, $b_{ij'}(t)$ (and the domain D).

A defect of property (*) for functions f_1, \dots, f_k is the dimension of the linear space of all the vectors $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ such that the corresponding linear combination $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k$ has no unremovable singularities.

An application: Spherical pendulum with a periodically oscillating point of suspension in the gravity force field.

Let a suspension point performs small oscillations with the acceleration $\varepsilon \vec{a}(t)$, where ε is a small parameter. We apply Melnikov method to study splitting of the complex

separatrices of an unstable equilibrium applying and to detect transversal homoclinic solutions appearing under the perturbation. The associated Poincaré–Arnold–Melnikov integrals are calculated along some double-infinite contour $\tilde{\Gamma}$. “Pasting” into the contour $\tilde{\Gamma}$ some closed contour Γ passed sufficiently many N times, we get that integrals taken along $\tilde{\Gamma}$ will be well-approximated up to a constant multiplier N by analogous integrals taken along Γ . In this way we get conditions for horizontal and vertical components of $\vec{a}(t)$ and their first derivatives, expressed in terms of the property (*), which guarantee that the complex transversal homoclinic solutions do asymptotically densely fill in any bounded region in each of the unperturbed separatrices, as $\varepsilon \rightarrow 0$; in particular, the system is not integrable for each small $\varepsilon \neq 0$.

It is rather remarkable that the only presence of singularities is important here, but their character is of no significance; this situation was not met before in rigorous results on non-integrability. The approximation theorem underlying the proof of the result is applicable due to some specific character of asymptotic expansions for the unperturbed double-asymptotic solutions near the equilibrium.

Устойчивость оптимального графика переработки продукта

А. И. Эгамов¹

¹ Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, Россия

albert810@yandex.ru

В работах [1, 2] была поставлена оптимизационная задача о порядке переработки n различных партий одинаковой массы скоропортящегося продукта – сахарной свеклы. Одна партия перерабатывается за некую единицу времени, например, сутки. Партии отличаются друг от друга различными параметрами – начальной сахаристостью a_i , $i = \overline{1, n}$; и коэффициентами деградации i -той партии после j -го периода времени – b_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n - 1}$, $b_{ij} \in (0, 1)$. То есть сахаристость i -той партии после j -го периода времени равна (если она к этому моменту не переработана)

$a_i \prod_{s=1}^j b_{is}$, так как в процессе хранения свекла увядает и ее сахаристость уменьшается. Пусть γ – перестановка чисел от 1 до n – оптимальный порядок переработки партий, максимизирующий целевую функцию S :

$$S(\gamma, n) = a_{\gamma(1)} + a_{\gamma(2)}b_{\gamma(2)1} + a_{\gamma(3)}b_{\gamma(3)1}b_{\gamma(3)2} + \dots + a_{\gamma(n)}b_{\gamma(n)1}b_{\gamma(n)2}\dots b_{\gamma(n)n-1}.$$

Сделаем замену переменных $p_{i1} = a_i$, $p_{ij} = a_i \prod_{s=1}^{j-1} b_{is}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{2, n}$. Если известны все параметры p_{ij} , поставленная задача сводится к задаче о назначениях, частному случаю транспортной задачи. Для задачи о назначениях в середине 20 века был предложен алгоритм нахождения оптимального решения с полиномиальной сложностью, который был назван венгерским алгоритмом.

Рассматривались 2 важных случая поставленной задачи и найдены естественные оптимальные графики переработки для максимизации значения целевой функции.

1 случай: $b_{ij} = b_j$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n-1}$, то есть коэффициент деградации не зависит от партии, а зависит только от периода переработки (от времени). Оптимальным планом переработки будет порядок по невозрастанию начальной сахаристости [1].

2 случай: начальная сахаристость всех партий одинакова: все $a_i = a$, $i = \overline{1, n}$, $b_{ij} = b_i$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n-1}$. Кроме того, $\frac{n-2}{n-1} \leq \min b_i$. Оптимальным планом переработки будет порядок партий по неубыванию коэффициентов деградации [2].

Назовем оптимальный план устойчивым, если он был оптimalен изначально без учета остановки производства. Во время J -го периода, $J = \overline{2, n-1}$, производство простоявало, а с $(J+1)$ -го продолжило работу, и предложенный в начале переработки план остался бы оптимальен с учетом новых коэффициентов деградации b_{in} , $i = \overline{1, n}$ и режима работы. Причем, если устойчивость зависит от конкретного номера J , оптимальный план условно устойчив, если устойчивость выполняется для любого J , то оптимальный план абсолютно устойчив. Оптимальный план при произвольных параметрах, вообще говоря, неустойчив, то есть, в большинстве случаев после временной остановки производства он перестает быть оптимальным.

При условиях, указанных в случаях 1 и 2, соответствующие оптимальные планы абсолютно устойчивы. Оптимальный план, вообще говоря, условно устойчив, если, например, при остановке в J -ый период все b_{iJ} , $i = \overline{1, n}$, равны, а для других

$j \neq J$ аналогичные равенства не выполняются. Нетрудно показать распределение параметров для еще одного примера условно устойчивого плана при $J = n - 1$.

Работа выполнена по договору № ССЗ-1771 от 22.04.2021г. на выполнение НИ-ОКТР на тему: «Создание высокотехнологичного производства сахара на базе АО «Сергачский сахарный завод», в рамках реализации Соглашения о предоставлении из федерального бюджета субсидии на развитие кооперации российской образовательной организации высшего образования и организации реального сектора экономики в целях реализации комплексного проекта по созданию высокотехнологичного производства № 075-11-2021-038 от 24.06.2021г. (ИГК 000000S407521QLA0002).

- [1] Д. В. Баландин, В. К. Вильданов, О. А. Кузенков, А. И. Эгамов. Оптимальный график переработки сахарной свеклы в условиях неопределенности. Сборник трудов Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». Воронеж. 328–334 (2021).
- [2] Д. В. Баландин, В. К. Вильданов, О. А. Кузенков, И. В. Захарова, А. И. Эгамов. Стратегия переработки партий сахарной свеклы при близких параметрах ее увядания. Математическое и компьютерное моделирование и бизнес-анализ в условиях цифровизации экономики : Сборник научных статей по итогам II Всероссийского научно-практического семинара. Н.Новгород. 10-18 (2022).

Investigating the source of complexity in the heart rate using a mathematical model of the cardiovascular system.

**Yu. M. Ishbulatov^{1,2,3,4}, T. S. Bibicheva⁴, V. I. Gridnev¹, M. D. Prokhorov^{3,4},
M. V. Ogneva⁴, A. R. Kiselev⁵, A. S. Karavaev^{1,3,4}**

¹ *Institute of Cardiological Research,
Saratov State Medical University, Russia*

² *Regional Scientific and Educational Mathematical Center of the P.G. Demidov,
Yaroslavl State University, Russia*

³ *Laboratory of Modelling in Nonlinear Dynamics,
Saratov Branch of the Institute of Radio Engineering and
Electronics of Russian Academy of Sciences, Russia*

⁴ *Research department, Saratov State University, Russia*

⁵ *Coordinating Center for Fundamental Research, National Medical Research
Center for Therapy and Preventive Medicine, Russia*

ishbulatov95@mail.ru

Heart of a healthy person contracts irregularly, and complexity indices estimated from the interbeat interval time series can be useful for early diagnosis of cardiovascular diseases [1]. However, researchers still debate over the origin of the complexity [2]. There are three main possible sources of complexity: deterministic chaotic dynamics of the elements of the cardiovascular system, the noise of “central” origin, or irregularity of respiration and cardiorespiratory coupling. Experimental investigation of this problem is limited by the capabilities of modern medical equipment, nonstationarity of real biological systems and potential risk for subject’s health.

We used a mathematical model of cardiovascular and respiratory systems to investigate the contribution of bidirectional cardiorespiratory coupling to the complexity of heart rate. We simulated an active experiment, which involved the blockade of autonomic control of respiration and disturbance of the bidirectional cardiorespiratory coupling. Then we measured the changes that occurred in the dynamics of the model and in

the complexity of heart rate using well-known spectral indices, statistical indices, and estimations of complexity indices, namely the largest Lyapunov exponent [3], and correlation dimensions.

Blockade of the control of respiration led to slower heart rate with lesser variability, lower aortic arterial pressure. The blockade also inhibited the autonomic control of circulation and the effects of “central” noise [4] on the circulation.

Obtained results suggest that bidirectional cardiorespiratory coupling has significant role in the dynamics of the cardiovascular system. However, paradoxically, the blockade of the control of respiration had no effect on estimations of the correlation dimension or the largest Lyapunov exponent. We think that this could be explained as follows.

Analysis of the model data have shown that the values of complexity measures increase after the blockade of autonomic control of circulation. On the contrary, the values of complexity measures decrease when the power of central noises decreases. We think that these effects took place simultaneously after the blockage of autonomic control of respiration and compensated for each other’s influence on the complexity of the heart rate [5].

This work was supported by the Russian Science Foundation, project No. 21-71-30011 (development of the mathematical model and numerical experiment) and the Project of RF Government, Grant No. 075-15-2019-1885 (physiological interpretation of the results).

- [1] A. Porta, V. Bari, G. Ranuzzi, B. de Maria, G. Baselli, *Chaos* 27(9), 093901 (2017).
- [2] T. Krogh-Madsen, L. Kold Taylor, A.D. Skriver, P. Schaffer, M.R. Guevara, *Chaos* 27(9), 093929 (2017).
- [3] M.T. Rosenstein, J.J. Collins, C.J. de Luca, *Physica D*, 65(1–2), 117–134 (1993).
- [4] A. Kapidžić, M.M. Platiša, T. Bojić, A. Kalauzi, *Respiratory Physiology & Neurobiology* 203, 51 – 59 (2014).
- [5] Yu.M. Ishbulatov, T.S. Bibicheva, V.I. Gridnev, M.D. Prokhorov, M.V. Ogneva, A. R. Kiselev, A. S. Karavaev, *Mathematics* 10(7), 1088 (2022).

Spherical flow diagram with finite hyperbolic chain-recurrent set.

V. D. Galkin, O. V. Pochinka

*National Research University Higher School of Economics,
Nizhny Novgorod, Russian Federation
vgalkin@hse.ru, oPOCHINKA@hse.ru*

In this paper, we consider flows with a finite hyperbolic chain-recurrent set without heteroclinic intersections on arbitrary closed n -manifolds. For such flows, the existence of a dual attractor and a repeller separated by a $(n - 1)$ -dimensional sphere, which is secant for wandering trajectories in addition to the attractor and repeller, is proved. The study of the dynamics of the considered flows makes it possible to obtain a topological invariant, called a spherical flow scheme, and consisting of a set of multi-dimensional spheres that are the intersection of a secant sphere with invariant saddle manifolds. Note that for some classes the flow spherical scheme is a complete invariant. Thus, it follows from G. Fleitas results that for polar flows (with a single sink and a single source) on the surface, it is the spherical scheme that is a complete equivalence invariant.

The author is partially supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, grant of the Ministry of science and higher education of the RF, ag. № 075-15-2022-1101.

- [1] G. Fleitas - Classification of gradient-like flows on dimensions two and three // Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática - Bulletin/Brazilian Mathematical Society, 1975, vol 6, pp.155–187
- [2] C. Kosniowski - A first course in algebraic topology // CUP Archive, 1980
- [3] T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, S. Kh. Zinina - On existence of Morse energy function for topological flows // Advances in Mathematics, 2021, vol. 378, pp.313–321

- [4] O. V. Pochinka, S. Kh. Zinina - Construction of the Morse–Bott Energy Function for Regular Topological FlowsConstruction of the Morse–Bott Energy Function for Regular Topological Flows // Regular and Chaotic Dynamics, 2021, vol. 326, pp.350–369
- [5] V. Z. Grines, V. S. Medvedev, O. V. Pochinka, E. V. Zhuzhoma - Global attractor and repeller of Morse–Smale diffeomorphisms // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2010, vol. 271, pp. 111–133

Low-dimensional macroscopic dynamics of systems with weakly-non-Lorentzian distribution of states

D. S. Golodobin¹, M. di Volo², L. S. Klimenko¹, A. Torcini^{3,4}

¹ *Institute of Continuous Media Mechanics, UB RAS, Perm, Russia*

² *Laboratoire de Physique Théorique et Modélisation,
Université de Cergy-Pontoise, CNRS, Cergy-Pontoise, France*

³ *CNR–Consiglio Nazionale delle Ricerche–Istituto dei Sistemi Complessi,
Sesto Fiorentino, Italy*

⁴ *INFN Sezione di Firenze, Via Sansone 1, I-50019 Sesto Fiorentino, Florence, Italy
Denis.Goldobin@gmail.com*

The populations of quadratic integrate-and-fire neurons (QIFs) are known to form and maintain a Lorentzian distribution of states of individual elements for several important network models (e.g., [2, 3]). One can show that these states are equivalent to the Ott–Antonsen ansatz [4] in terms of phase variables. For an evolving Cauchy distribution, one can derive a low-dimensional equation system governing the dynamics of the mean membrane voltage and the firing rate. However, in some practically important setups, the Lorentz form of distribution (in other variables, the conditions of the applicability of

the Ott–Antonsen ansatz) is distorted and the original low-dimensional model becomes inapplicable [3, 5].

We present an approach based on the characteristic function representation of the probability density deviating from the Lorentzian distribution; for such a function ordinary cumulants diverge, but one can introduce alternative objects, «pseudocumulants» [1]. The real and imaginary parts of the first pseudocumulant are the firing rate and the mean voltage; higher pseudocumulants introduce small corrections to their dynamics. This description is not equivalent to the circular cumulant approach [6, 7]; the corrections due to the second circular cumulant coincide with those due to the second pseudocumulant only to the first order of expansion with respect to a small parameter. Simultaneously, specifically for QIF populations, the pseudocumulant equation sets are much more concise than the circular cumulant ones and, more importantly, physical observables — mean voltage and firing rate — have a simple and natural representation in terms of pseudocumulants (cf. [5, 7]).

The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. 121112200078-7).

- [1] D.S. Goldobin, M. di Volo, A. Torcini, Phys. Rev. Lett. 127, 038301 (2021).
- [2] E. Montbrio, D. Pazo, A. Roxin, Phys. Rev. X 5, 021028 (2015).
- [3] M. di Volo, A. Torcini, Phys. Rev. Lett. 121, 128301 (2018).
- [4] E. Ott, T.M. Antonsen, Chaos 18, 037113 (2008).
- [5] I. Ratas, K. Pyragas, Phys. Rev. E 100, 052211 (2019).
- [6] I.V. Tyulkina, D.S. Goldobin, L.S. Klimenko, A. Pikovsky, Phys. Rev. Lett. 120, 264101 (2018).
- [7] D.S. Goldobin, A.V. Dolmatova, Phys. Rev. Research 1, 033139 (2019).

Reversible perturbations of conservative maps and mixed dynamics

M. S. Gonchenko

Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain

marina.gonchenko@upc.edu

We consider area-preserving Hénon-like maps and their compositions and study smooth perturbations that keep the reversibility of the initial maps but destroy their conservativity. To construct these perturbations, we use two methods, a new method based on reversible properties of maps written in the so-called cross-form, and the classical Quispel-Roberts method based on a variation of involutions of the initial map. We study symmetry breaking bifurcations of symmetric periodic orbits in reversible families which contain conservative orientable and non-orientable Hénon maps as well as the product of two Hénon maps whose Jacobians are mutually inverse. In particular, we study how reversible non-conservative perturbations affect to the structure of the 1:3 resonance, i.e. bifurcations of fixed points with eigenvalues $e^{\pm i2\pi/3}$, in the conservative cubic Hénon maps. These are joint works with S. Gonchenko, K. Safonov, A. Kazakov, E. Samylina and A. Shykhmamedov.

On reversible systems with Lorenz attractors and repellers

Gonchenko A.S.¹, Korotkov A. G.², Samylina E.A.³

¹*Mathematical Center of Lobachevsky University, Nizhny Novgorod, Russia*

Department of Control Theory, Nizhny Novgorod State University, Russia

³*National Research University Higher School of Economics,*

25/12 Bolshaya Pecherskaya Ul., 603155 Nizhny Novgorod, Russia

agonchenko@mail.ru, korotkov@itmm.unn.ru, samylina_evgeniya@mail.ru

We study the problem on the existence of Lorenz-like attractors and repellers in three-dimensional time-reversible systems, as well as the structure of bifurcation scenarios for their emergence. In this connection, we consider a system that is the flow normal form for reversible bifurcations of a fixed point with the triplet $(-1, -1, +1)$ of multipliers. The bifurcation set itself of the indicated reversible bifurcation should be extremely complex (the normal form contains 7 independent parameters). However, we are mainly interested here in bifurcations leading to the appearance of a symmetric pair “Lorenz attractor – Lorenz repeller”, which, as we show, can be studied within the framework of two-parameter subfamilies. In this work, two main bifurcation scenarios for the emergence of such a pair are described, and also a quite unusual scenario is outlined for the appearance of Lorenz-like attractor and repeller in the case when the system has only two equilibria. The corresponding phenomenon seems new – for comparison, we note that even the Lorenz system has three equilibria: one of them belongs to the attractor, and the other two reside in its “holes”. This work was supported by the Russian Science Foundation grant 19-11-00280.

Study of the dynamics of a balance platform during a short-term training

V. S. Khorev¹

¹ *Neuroscience and Cognitive Technology Laboratory,
Center for Technologies in Robotics and Mechatronics Components,
Innopolis University, 420500, Innopolis, Russia
khorevvs@gmail.com*

Muscle training while solving complex motor task is an activity frequently used to improve health and muscle strength. However, little is known regarding how muscle training is progressing during a short-term training. The understanding of mechanisms responsible for the short-term training effects could be useful for the various tasks of sports and rehabilitation. The purpose of this study was to assess the dynamics of the movement of the platform movement associated with the equilibrium [1, 2]. We conducted the original experiment with human test subjects. Surface electromyography was collected on ankle and knee flexors and extensors of 16 participants. Balance board angle, angular velocity and angular acceleration were registered. The obtained results show the effect of training from session to session during the experiment. We observed the changes in the patterns of electrical activity of the muscles that occurred at the times of equilibrium for the EMG correlation characteristics during the experiment and analyzed them. The increase in equilibrium duration is correlated with the mean muscle activity. The platform movement trajectories were different for the dominant and non-dominant limb. Our results suggest the effect of training is progressing by reducing the functional asymmetry of the non-general limb during a short-term activity.

The work was supported by the Program of Scientific School Support (grant NSH-589.2022.1.2).

- [1] A. N. Pisarchik, U. Feudel, Physics Reports 540, 167-218 (2014) .

- [2] A. N. Pisarchik, A. E. Hramov, Multistability in Physical and Living Systems: Characterization and Applications, Springer (2022).

Среднеполевая динамика неоднородных нейронных сетей

Клиньшов В.В., Кириллов С.Ю., Некоркин В.И.

*Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
«Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики
Российской академии наук» (ИПФ РАН)
г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
vladimir.klinshov@ipfran.ru*

Исследование коллективной динамики крупномасштабных нейронных сетей является одним из ключевых направлений современной нелинейной науки, расширяющих и углубляющих понимание принципов функционирования мозга и обработки в нем информации. Вместе с бурным развитием компьютерных технологий открываются возможности для прямого численного моделирования огромных сетей (миллионы нейронов и миллиарды синапсов) с высокой детализацией внутренней структуры (мульти-комpartmentные модели клеток, сложная кинетика синапсов). Однако такие исследования все же остаются весьма затратными с точки зрения вычислительных ресурсов, а также проблематичны с точки зрения интерпретации получаемых результатов. В связи с указанными недостатками высокодетализированного моделирования все большую популярность приобретает другой подход, в котором поведение средне- и крупномасштабных нейронных популяций сводится к низкоразмерным редуцированным динамическим системам для усредненных переменных, таких как средний мембранный потенциал или средняя частота возбуждения. Такие системы называются «среднеполевыми системами» или «моделями нейронных масс».

Модели нейронных масс имеют давнюю историю, восходящую к классической модели Вилсона-Кована [1]. Однако в последние годы бурно развиваются так называемые модели «нового поколения» [2], имеющие ряд ключевых отличительных черт. Во-первых, в отличие от феноменологических моделей прошлого, модели нового поколения могут быть выведены из уравнений для микроскопической динамики нейронной популяции. Во-вторых, помимо описания активности нейронов они способны также описывать и степень их синхронизации, что принципиально важно при моделировании колебательной динамики и генерации мозговых ритмов. Начало развитию среднеполевых моделей нового поколения положила работа Монтбрио, Пазо и Роксина [3], в последующих работах модель МРП была использована для исследования многих биологически важных задач, а также обобщена и усовершенствована в целом ряде аспектов. Например, был предложен метод описания сетей с реалистичной, а не модельной формой неоднородности [4], а также описано влияние эффектов конечного размера

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (грант 19-72-10114).

- [1] H.R. Wilson, J.D. Cowan, Biophysical Journal, 12(1), 1–24 (1972).
- [2] S. Coombes, A. Byrne, in: Nonlinear dynamics in computational neuroscience, 1-16 (Springer, Cham, 2019).
- [3] E. Montbrió, D.Pazó, A. Roxin, Physical Review X, 5, 021028 (2015).
- [4] V. Klinshov, S. Kirillov, V. Nekorkin, Physical Review E, 103(4), L040302 (2021).
- [5] V. Klinshov, S. Kirillov. arXiv preprint arXiv:2205.01984 (2022)

Synchronous dynamics in small ensemble of nonidentical phase elements.

A. G. Korotkov, T. A. Levanova, G. V. Osipov

Department of Control Theory, Nizhny Novgorod State University, Russia

korotkov@itmm.unn.ru

Consider minimal neural ensemble consists of two coupled non-identical elements:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = \gamma - \sin \phi_1 + d \cdot I(\phi_2) \\ \dot{\phi}_2 = \gamma + \Delta - \sin \phi_2 + d \cdot I(\phi_1) \end{cases}. \quad (1)$$

Here ϕ_i corresponds to the phase of the i -th element. Parameter γ is a control parameter that defines the type of behaviour demonstrated by single element: excitable state for $\gamma < 1$, or tonic spiking for $\gamma > 1$. Below we consider the first case with $\gamma = 0.95$. Additional parameter Δ introduces the phase difference between elements.

The excitatory chemical synaptic coupling is modelled by the function

$$I(\phi) = \frac{1}{1 + e^{k(\cos(\delta/2) - \cos(\phi - \alpha - \delta/2))}}. \quad (2)$$

as in our previous study [1]. Coupling of this form was first introduced in [1], and afterward tested in several subsequent studies [2, 3]. It describes the signal propagation principle for chemical synapse, when the signal is transmitted from the presynaptic element to the postsynaptic one [4]: when the level of activity in the presynaptic element is sufficient, postsynaptic element becomes excited.

Mathematically it can be describe as follows. When the phase ϕ of the active presynaptic element reaches the value α , the current is applied to the postsynaptic element. Duration of the impact of this stimulus is defined by δ , which value should be taken not too big for biologically realistic modelling. We also fix $\alpha = \arcsin(\gamma) - \frac{\delta}{2}$ throughout the study guided by the following considerations. In case of an isolated element its steady state is defined as $\phi_{ss} = \arcsin(\gamma)$. In the presence of coupling it is reasonable to set the band

in the phase space where one element activates another around this value to provide spiking. We also fix $k = 50$ to ensure the sharp step-wise profile of coupling function $I(\phi)$.

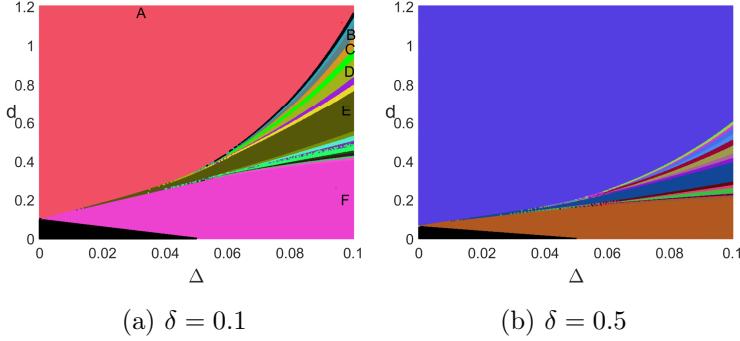


Рис. 2: Two-parameter maps of synchronous regimes on the plane (d, Δ) for different values of couplings duration δ . Black color correspond to steady state. All other colors are set randomly. (a) $\delta = 0.1$. Main types of synchronization are marked with capital letters: $A - 1 : 1$, $B - 4 : 5$, $C - 3 : 4$, $D - 2 : 3$, $E - 1 : 2$, $F - 0 : 1$. (b) $\delta = 0.5$.

Fig. 2 shows two-parameter maps of synchronous regimes on the plane $P_1 = (\Delta, d)$ for different values of parameter δ , which corresponds to the duration of synaptic input. In this study we limit ourselves to quite small values of coupling duration that are biologically plausible.

The work was supported by the Ministry of Education and Science (Grant No. 0729-2020-0036).

- [1] A. G. Korotkov et al. Dynamics in a phase model of half-center oscillator: Two neurons with excitatory coupling //Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. - 2022. - V. 104. - P. 106045.
- [2] A. G. Korotkov et al. Chaotic regimes in the ensemble of FitzHugh-Nagumo elements with weak couplings //IFAC-PapersOnLine. - 2018. - V. 51. - No. 33. - P. 241–245.
- [3] A. G. Korotkov et al. Effects of memristor-based coupling in the ensemble of FitzHugh-Nagumo elements //The European Physical Journal Special Topics. - 2019. - V. 228. - No. 10. - P. 2325–2337.

- [4] A. Destexhe et al. An efficient method for computing synaptic conductances based on a kinetic model of receptor binding //Neural Comp. - 1994. - V. 6. - P. 14–18.

Fast methods for construction of homoclinic and heteroclinic bifurcations diagrams and Lorenz-like attractors.

V. A. Koryakin

Research Assistant HSE Campus in Nizhny Novgorod

Faculty of Informatics, Mathematics, and Computer Science

International Laboratory of Dynamical Systems and Applications,

National Research University Higher School of Economics, Russia

vakoryakin@edu.hse.ru

In this work, we apply fast numerical methods for the analysis of ODE systems with Lorenz-like attractors. Such methods for homoclinic bifurcation analysis are based on the symbolic approach described in [1], [2]. We extend this method to study heteroclinic bifurcations and to search for Bykov's cycles [4].

The effectiveness of the developed methods is demonstrated on the several examples. As the first example, we considered the well-known three-dimensional Lorenz system. In this system we reproduce known results: we found Bykov points and construct the corresponding heteroclinic cycles . The second example is the three-dimensional system considered in [5]. For this system we construct bifurcation diagram and studied heteroclinic bifurcations leading to the birth of heteroclinic Lorenz-like attractors. The third example is the six-dimensional system —physically relevant extension of the well-known Lorenz system [6]. Using the developed methods, we find for this 6D system the region of existence of the Lorenz attractor.

The methods were implemented in C++ language using CUDA framework for parallelization.

And the visualization was made with Python language using Matplotlib library.

The author thanks to Alexey Kazakov for the task statement and fruitful discussion.

The work was supported by the Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE of the Ministry of Science and Higher Education of the RF (Grant No. 075-15-2019-1931).

- [1] Barrio, R., Shilnikov, A., Shilnikov, L. (2012). Kneadings, symbolic dynamics and painting Lorenz chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(04), 1230016
- [2] Xing, T., Barrio, R., Shilnikov, A. (2014). Symbolic quest into homoclinic chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24(08), 1440004.
- [3] Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of atmospheric sciences*, 20(2), 130-141.
- [4] Bykov, V. V. [1993] "The bifurcations of separatrix contours and chaos *Physica D* 62, 290-299.
- [5] Gonchenko S.V., Karatetskaia E., Kazakov A., Kruglov V. On new pseudohyperbolic attractor of Lorenz type. (in preparation)
- [6] Moon, S., Seo, J. M., Han, B. S., Park, J., Baik, J. J. (2019). A physically extended Lorenz system. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 29(6), 063129.

On new conjoined Lorenz-like attractor

Kruglov V. P.^{1,2}, Kazakov A. O.^{3,1}, Karatetskaya E. Yu.³,
Gonchenko S. V.^{1,3}

¹ Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

² Saratov Branch Kotelnikov Institute of Radioelectronics and Electronics of RAS

³ National Research University Higher School of Economics

kruglovyacheslav@gmail.com

We introduce a new type of Lorenz-like chaotic pseudohyperbolic attractor that features 3 saddle equilibria with their unstable manifolds. We provide two types of governing equations. The first is the system of three ordinary differential equations with symmetries $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ and $z \rightarrow -z$, the second system is a three-dimensional Hénon map with cubic nonlinearities and symmetry $(X, Y, Z) \rightarrow (-X, -Y, -Z)$.

Both systems manifest a “conjoined” Lorenz-like attractor at wide range of parameters. It visually consists of two symmetric parts, and we consider them only the parts of the conjoined attractor. The reason is that we can not define a surface surrounding the absorbing domain with attractor inside and transversal to the flow, that separates two parts of attractor. Both upper and lower parts look similar to classic Lorenz attractor, indeed the discovered conjoined attractor is pseudohyperbolic according to numerical results.

We conjecture, that the flow system (1) is close to the normal form of the map (2) near the fixed point with triplet of multipliers $(-1, -1, 1)$.

The research was carried out in the framework of the RSciF Grant No. 19-11-00280-P.

- [1] Gonchenko, S., Gonchenko, A., Kazakov, A., & Samylina, E. (2021). On discrete Lorenz-like attractors. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 31(2), 023117.

Моделирование нелинейной динамики при помощи искусственных нейронных сетей

П. В. Купцов¹

¹НИУ ВШЭ Нижний Новгород,

Лаборатория топологических методов в динамике

kuprav@mail.ru

Искусственные нейронные сети можно рассматривать как отображение между двумя векторными пространствами. Существует серия теорем [1, 2], которые обосновывают использование нейронных сетей для аппроксимации практически любых зависимостей. Это значит, что нейронные сети можно использовать для моделирования динамики. Вообще говоря, нейронные сети уже достаточно давно применяются для реконструкции динамических систем. Мы предлагаем более широкий взгляд на задачу и рассматриваем возможность построения моделирующих нейронных сетей, когда динамические уравнения известны. Мотивация этого подхода в том, чтобы разработать универсальную сетевую архитектуру. Используя ОДУ для моделирования мы подбираем их структуру для каждого конкретной системы. Подход на основе нейронных сетей, напротив, должен допускать использование одной и той же архитектуры, а выбор системы определяться данными обучения.

Универсальная нейросетевая динамическая модель может быть интересна для теоретических исследований в силу возможности разработки универсальных теоретических методов анализа, применимых сразу для широкого спектра систем. С практической точки зрения она имеет значение в силу того, что хорошо адаптированы для современных многопоточных вычислительных систем.

В рамках реализации этой программы мы рассматриваем две конфигурации. Простейшая полносвязная сеть прямого распространения с одним скрытым слоем применяется для воспроизведения динамики систем Лоренца и Рёссlera, а также для модели физиологического нейрона Хиндмарша—Роуза [3]. Обученная соответствующим образом нейросетевая модель воспроизводит аттракторы указанных си-

стем, их бифуркационные диаграммы, спектры Фурье и показатели Ляпунова. Однако она не справляется с моделированием более сложной и, соответственно, более реалистичной модели физиологического нейрона на основе формализма Ходжкина—Хаксли. Вторая, более развитая архитектура, построена на основе идеи моделирования каждой динамической переменной системы отдельной подсетью [4]. Управляющие параметры и остальные переменные подмешиваются к подсети через дополнительный каскад в виде одного нейронного слоя. Организованная таким образом нейронная сеть показывает высокую точность воспроизведения моделируемых физиологических нейронных осцилляторов. В частности, воспроизводится бифуркационный переход от бёрстовых колебаний к спайковым. Кроме того, что наиболее интересно, построенная нейронная сеть демонстрирует способность обнаруживать динамические режимы, не предъявленные ей в процессе обучения. А именно, будучи обученной на отрезках траекторий, отвечающих только периодическим колебаниям, нейросетевая динамическая система демонстрирует неподвижную точку точно совпадающую по расположению в фазовом пространстве с неподвижной точкой исходной системы. Воспроизводятся также значения собственных чисел матрицы Якоби в этой точке, которые характеризуют её устойчивость. Для физиологического нейрона с бистабильностью неподвижной точки и колебаний, нейронная сеть точно воспроизводит бифуркационный переход в режим бистабильности. Это значит, что нейронная сеть, обученная только на одной ветви решений может, вследствие обобщения полученных в ходе обучения данных, находить вторую ветвь, которая в ходе обучения ей не предъявлялась.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №20-71-10048, <https://rscf.ru/en/project/20-71-10048/>.

- [1] А. Н. Колмогоров, ДАН СССР 114(5), 953-956 (1957).
- [2] G. Cybenko, Mathematics of control, signals and systems 2(3), 303-314 (1989).
- [3] P. V. Kuptsov, A. V. Kuptsova, N. V. Stankevich, Russ J Nonlinear Dyn, 17(1), 5-21 (2021).
- [4] P. V. Kuptsov, N. V. Stankevich, E. R. Bagautdinova, arXiv:2203.14138 (2022).

Анализ синхронизация спин-трансферных осцилляторов с одноосной симметрией и полевой связью в фазовом приближении

П. В. Купцов¹

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники

им. В.А. Котельникова Российской академии наук

kuprav@mail.ru

Спин-трансферный осциллятор — это наноразмерное устройство, которое способно генерировать маломощное СВЧ излучение вследствие прецессии вектора своей намагниченности, возникающей при пропускании через устройство электрического тока. Математическая модель осциллятора задаётся уравнением Ландау-Лифшица-Гильберта-Слончевского, которое описывает динамику вектора намагниченности. Формально это три скалярных ОДУ, однако так как модуль вектора сохраняется, эффективная размерность фазового пространства равна двум. Из-за большого количества параметров и кубической нелинейности, анализ полного уравнения в общем виде достаточно громоздок [1]. Мы рассматриваем частный случай, когда осциллятор обладает внутренней симметрией относительно оси z , вдоль которой течёт электрический ток [1]. Уравнения для данного случая становятся значительно проще но при этом сохраняют свои ключевые особенности.

Достаточно часто исследуется параметрическое взаимодействие спин-трансферных осцилляторов как электронных устройств, включённых в цепь последовательно или параллельно. Связь возникает из-за того, что электрическое сопротивление осцилляторов меняется вместе с намагниченностью за счёт эффекта гигантского магнитного сопротивления. Такая схема взаимодействия работает как глобальная связь через общее поле и не допускает построения сложных конфигураций взаимодействия. Мы рассматриваем другой тип связи, когда осцилляторы воздействуют друг на друга непосредственно, через создаваемые ими магнитные поля.

Исследуется система двух осцилляторов. Уравнение для первого имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{m}_{1,x} &= m_{1,z} A_1 m_{1,x} + B_1 m_{1,y} + \epsilon \{ \alpha [m_{2,x} - (\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2) m_{1,x}] - m_{1,y} m_{2,z} + m_{2,y} m_{1,z} \}, \\ \dot{m}_{1,y} &= -B_1 m_{1,x} + m_{1,z} A_1 m_{1,y} + \epsilon \{ \alpha [m_{2,y} - (\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2) m_{1,y}] + m_{1,x} m_{2,z} - m_{2,x} m_{1,z} \}, \\ \dot{m}_{1,z} &= A_1 (m_{1,z}^2 - 1) + \epsilon \{ \alpha [m_{2,z} - (\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2) m_{1,z}] - m_{1,x} m_{2,y} + m_{2,x} m_{1,y} \},\end{aligned}\tag{1}$$

где $A_1 = (m_{1,z} - h_z + \beta_1/\alpha)\alpha$, $B_1 = m_{1,z} - h_z - \beta_1\alpha$, а уравнение для второго получается заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$. Система уравнений имеет пять управляемых параметров: α отвечает за затухание, h_z — внешнее магнитное поле, β_1 и β_2 управляет собственными частотами осцилляторов, ϵ задаёт силу связи.

Синхронизация в системе (1) рассматривается в фазовом приближении для случая малой расстройки собственных частот, т. е. когда $\beta_1 - \beta_2$ мало, и слабой связи ϵ . Задавая решение в виде $m_{1,2,x} = \sqrt{1-a^2} \cos \phi_{1,2}(t)$, $m_{1,2,y} = \sqrt{1-a^2} \sin \phi_{1,2}(t)$, $m_{1,2,z} = a$, где a — постоянная амплитуда, а $\phi_{1,2}$ зависящие от времени фазы первого и второго осцилляторов, мы находим выражения для амплитуды и стационарной разности фаз $\psi = \phi_1 - \phi_2$ в режиме синхронизации:

$$a = h_z - (\beta_1 + \beta_2)/(2\alpha), \quad \sin \psi = (\beta_1 - \beta_2)/(2\epsilon),\tag{2}$$

а также получаем фазовое уравнение Адлера-Хохлова [2, 3] $\dot{\psi} = \delta - \mu \sin \psi$, где параметры δ , имеющий смысл частотной расстройки, и μ , играющий роль параметра связи, для системы (1) имеют вид:

$$\delta = \alpha(\beta_1 - \beta_2)/(\alpha^2 + 1), \quad \mu = 2\epsilon\alpha/(\alpha^2 + 1).\tag{3}$$

Из уравнения Адлера-Хохлова получаем выражение для языка синхронизации

$$|\beta_1 - \beta_2| = 2\epsilon.\tag{4}$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №21-12-00121, <https://rscf.ru/project/21-12-00121/>.

- [1] I. D. Mayergoyz, G. Bertotti, C. Serpico, *Nonlinear magnetization dynamics in nanosystems*, Elsevier, 2009.

- [2] R. Adler, Proc. of the I.R.E. and Waves and Electrons, 34(6), 351-357 (1946).
- [3] P. B. Хохлов, ДАН СССР, 97(3), 411-414, (1954).

.

A methods for calculating cardiointervalogram signals from a photoplethysmogram for analyzing the synchronization of the autonomic control loops of the cardiovascular system

A. V. Kurbako¹, V. V. Skazkina¹, E. I. Borovkova¹, A. S. Karavaev¹

¹ Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radio Engineering
and Electronics of Russian Academy of Sciences, Russia
kurbako.sasha@mail.ru

The human body is a complex non-linear system of high dimension. The regulation of the work of its elements is ensured by the coordinated work of many loops of the nervous and humoral regulation. To control the state of the body, it is possible and important to quantify the characteristics of the dynamics of the subsystems of nervous regulation by analyzing the low-frequency spectral components in the signals of the cardiovascular system (CVS) [1]. Synchronization of 0.1 Hz oscillations in the heart rhythm and peripheral circulation is an important physiological feature of the human body, allowing it to adapt and self-regulate [2].

Previously, a new indicator for assessing the degree of synchronization of 0.1 Hz oscillations was proposed, which is focused on the analysis of non-stationary signals of a biological nature - the total percentage of phase synchronization S [3]. An important step in the development of compact, mass-produced and ergonomic diagnostic devices is the transition from synchronization analysis based on a pair of simultaneously recorded signals: an electrocardiogram (ECG) and a photoplethysmogram (PPG) to an estimate of S based on a univariant PPG signal. The fundamental possibility of this was shown

by us earlier [4]. In this paper, our previously proposed approach is compared with three new methods in the course of comparing cardiotintervalograms (CIG) calculated from ECG and PPG recorded from healthy subjects and patients suffering from COVID-19.

Experimentally obtained 25 simultaneous ECG recordings and PPG of healthy volunteers without identified CVS pathologies (13 men 21.2 ± 3.1 years old, 12 women 20.9 ± 2.2 years old) and patients with COVID-19 (12 men 49.4 ± 11.6 years old, 9 women 51.0 ± 12.5 years old). For analysis, five-minute sections of the recordings were selected that did not contain artifacts and arrhythmia sections.

In the work, we compared the methods for extracting CIG from PPG as intervals between local maxima (method 1) or minima (method 2) of a signal filtered in the range of 0.6-1.8 Hz, as well as methods for extracting CIG as intervals between local maxima (method 3) or minima (method 4) PPG signal filtered in the range of 0.6-6.0 Hz in the windows of adjacent cardiocycles, determined from the PPG signal filtered in the range of 0.6-1.8 Hz. The selection of the optimal ranges of signal filtering is carried out when searching for frequencies by means of maximizing the probability that the phase coherence coefficient between the reference signal obtained from the ECG and the signal obtained by one of the PPG methods will be higher than 0.95.

The operability of the used CIG extraction techniques was compared in the course of calculating the total percentage of phase synchronization S of various categories of subjects using a pair of ECG and PPG signals, or using a univariant PPG signal. The ensemble average values of the difference between S obtained from a pair of signals and S from one PPG signal for healthy subjects are: 7.34 ± 9.69 for method 1, 7.05 ± 7.43 for method 2, 7.69 ± 7.84 for method 3, 5.83 ± 6.34 for method 4. The ensemble mean differences for COVID-19 patients are 6.28 ± 7.50 , 5.32 ± 7.61 , 5.34 ± 5.79 , and 5.75 ± 4.29 for methods 1-4, respectively.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects No. 20-02-00702 and No. 20-38-90067), as well as within the framework of the state task of the Saratov Branch of the Institute of Radio Engineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences.

[1] R.M. Baevsky, G.G. Ivanov, L.V. Chireikin et al., Bulletin of Arrhythmology, 24,

- 65 (2001).
- [2] C. Schafer, M.G. Rosenblum, J. Kurths, H.-H. Abel, Nature 392(6673), 239 (1998).
- [3] A.S. Karavaev, M.D. Prokhorov, V.I. Ponomarenko et al., Chaos 19(3), 033112 (2009).
- [4] D.D. Kulminskii, O.V. Astakhov, A.R. Kiselev, A.S. Karavaev, Nanophotonics, nanoelectronics and nonlinear physics, 139 (2013).

**Построение функции приспособленности в двустадийной
модели популяционной динамики**

О. А. Кузенков

*Кафедра дифференциальных уравнений, математического и численного анализа,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Россия
kuzenkov_o@mail.ru*

Функция приспособленности играет значительную роль в моделях биологической эволюции и популяционной динамики [1]. Эта функция численно характеризует селективные преимущества конкурирующих видов. Вид, имеющий наибольшую приспособленность, согласно Дарвинской концепции эволюции, выживает в сообществе в результате борьбы за существование. Для широких классов систем функция приспособленности представляет средний по времени удельный коэффициент воспроизводства. Знание функции приспособленности позволяет прогнозировать результаты биологической эволюции. Математически максимизация функции приспособленности позволяет найти устойчивые состояния равновесия, что дает дополнительные средства для качественного анализа популяционных моделей без привлечения классических методов Ляпунова. Функция приспособленности в ряде

случаев помогает решить проблему идентификации параметры модели, что представляет существенную сложность при математическом описании биологических систем.

В работе [2] была предложена методика построения функции приспособленности по данным наблюдений за долгосрочной динамикой численности сообщества. Эта проблема решалась путем сравнения селективных преимуществ разных видов, введения порядка предпочтительности на их множество и восстановления соответствующей функции сравнения средствами машинного обучения. Для этого применяется попарный метод ранжирования, который сводится к классификации упорядоченных пар видов по двум классам: «первый вид вытесняет второй» и «второй вид вытесняет первый». Особую сложность представляет случай, когда введенный порядок предпочтительности зависит от множества конкурирующих видов, то есть в фиксированной паре как первый вид может вытеснять второй, так и второй вид первый в зависимости от того, в каком множестве эта пара существует [3]. В этом случае для восстановления функции приспособленности кроме методов ранжирования необходимо использовать гипотезы межвидового взаимодействия, отраженные в уравнениях модели [4].

В настоящей работе решена задача построения функции приспособленности на множестве сосуществующих жертв в модели «хищник – жертвы». В модели учитывается наличие двух возрастных стадий жертв, отличающихся по своим поведенческим характеристикам. Проведенное исследование использовано для анализа данных натурных наблюдений за ежедневными вертикальными миграциями зоопланктона [5]. При этом удается достаточно точно идентифицировать ряд параметров наблюдаемого поведения, что имеет решающее для составления прогноза на основе модели.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Проект № 075-15-2021-634).

- [1] O. Kuzenkov, A. Morozov, Bulletin of Mathematical Biology, 81(11), 4675-4700 (2019) doi.org/10.1007/s11538-019-00602-3.

- [2] O. Kuzenkov, G. Kuzenkova, A. Morozov, Entropy, 23(1), 1-17 (2021) DOI: 10.3390/e23010035.
- [3] S. K. Sandhu, A. Morozov, O. Kuzenkov, Bulletin of Mathematical Biology, 81(11), 4701–4725 (2019) DOI: 10.1007/s11538-019-00663-4.
- [4] О.А. Кузенков, Прикладная нелинейная динамика, 30(3), 276-298 (2022) DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-3-276-298
- [5] A. Morozov, O. Kuzenkov, Journal of Theoretical Biology, 405, 17—28 (2016) DOI: 10.1016/j.jtbi.2016.01.011.

Complex dynamics of three coupled quasi-periodic generators

A.P. Kuznetsov¹, Yu.V. Sedova¹, N. V. Stankevich^{1,2}

¹ *Kotelnikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS,
Saratov Branch, Russia,*

² *Laboratory of Topological methods in Dynamics, HSE University,
Nizhny Novgorod, Russia
stankevichnv@mail.ru*

Synchronization is a fundamental non-linear phenomenon, which consists in tuning the frequencies of interacting self-oscillatory systems [1]. The classical picture of synchronization includes synchronization tongues that occur with a rational ratio of frequencies of subsystems, and quasi-periodic oscillations with an irrational ratio of frequencies in subsystems. Quasi-periodic oscillations are oscillations characterized by several incommensurable frequencies. In the simplest case, there are two frequencies, and such oscillations are characterized by an attractor in the form of a three-dimensional torus in the phase space. In [2] a family of autonomous generators of quasi-periodic

oscillations with a minimal dimension of the phase space is proposed. These generators allow constructing ensembles and investigating the phenomenon of synchronization in the case when autonomous systems have two incommensurable frequencies each. The problem of synchronization of quasi-periodic oscillations is complex and multifaceted, since it can involve various interaction options and consideration of resonant tongues and torus destruction [3].

In the frame of this work, we consider ensembles of quasiperiodic oscillators consisting from two, or three oscillators. Partial subsystems can demonstrate as quasi-periodic oscillations, as all modes associated with the birth and destruction of a torus: periodic and chaotic self-oscillations. We study different types of synchronization between oscillators: phase synchronization, broadband synchronization and complete synchronization.

Increasing of ensemble size involve new frequencies in the dynamical system and it leads to appearance new effects. For three coupled oscillators we revealed different type of synchronizations. We study quasi-periodic bifurcations which can give transitions to different dynamical behaviors. The features of chaotic dynamics are studied.

The work is supported by the grant of Russian Science Foundation (Project No. 21-12-00121, investigation of synchronization) and grant RFBR (Project No. 19-31-60030, investigation of chaotic attractors).

- [1] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths. *Synchronization: a universal concept in nonlinear science*. 2002.
- [2] A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, E. Mosekilde, N.V. Stankevich, European Physical Journal Special Topics 222(10), 2391-2398 (2013).
- [3] A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, N.A. Shchegoleva, N.V. Stankevich, Physica D 398, 1-12 (2019).

Chaos for multidimensional perturbations of dynamical systems with small dimension

M. I. Malkin¹

¹*Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics,*

Nizhny Novgorod State University, Russia

malkin@unn.ru

The relationship between chaotic orbit behavior and entropies (both topological and measure theoretical) are considered for difference equations which are multidimensional perturbations of generalized one-dimensional maps. More precisely, we consider solutions for difference equation

$$\Phi_\lambda(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+m}) = 0, \quad n \in \mathbf{Z},$$

of order m with parameter λ from some metric space. It is assumed that the non-perturbed operator Φ_{λ_0} is degenerate so that it depends on two variables, i.e.,

$$\Phi_{\lambda_0}(y_0, \dots, y_m) = \psi(y_N, y_M),$$

where $0 \leq N < M \leq m$ and ψ is a piecewise monotone piecewise C^2 function (not necessarily continuous). It is also assumed that the implicit function $\psi(x, y) = 0$ has a branch $y = \varphi(x)$ with positive topological entropy: $h_{top}(\varphi) > 0$.

By using the anti-integrable approach, we show under the assumptions above how the chaotic behavior of generalized one-dimensional map can be continued to provide multidimensional chaos for bounded orbits of perturbed systems. In particular, we prove that the topological entropy for the restriction to bounded orbits can be approximated arbitrarily close by the value $h_{top}(\varphi)/(M - N)$ (for λ near λ_0). Also, since φ possesses at least one measure μ^* with maximal entropy (i.e., $h_{top}(\varphi) = h_{\mu^*}(\varphi)$), we show how the maximal measure μ^* can be used to construct an invariant measure μ_λ with respect to the shift map σ on the symbolic space Λ_λ for bounded bi-infinite solutions of difference

equations with parameter λ , and we prove that the measure theoretic entropy $h_{\mu_\lambda}(\sigma|_{\Lambda_\lambda})$ approximates the value $h_{top}(\varphi)/(M - N)$ for λ close enough to λ_0 .

Finally we discuss applications of the proposed approach to concrete parameter families (including Arneodo-Coullet-Tresser maps, Lorenz maps, discrete versions of certain PDE's, etc.) in order to establish their chaotic behavior and scenarios. Our technique uses results on maximal measures of symbolic systems [1], on perturbations of singular difference equations [2], and on one-dimensional factor maps for flows with Lorenz attractors [3].

- [1] M.I. Malkin, "Countable Topological Markov Chains with Meromorphic Zeta-Functions," *Random & Computational Dynamics* 2, 247-259 (1994).
- [2] J. Juang, M.-C. Li, M.I. Malkin, "Chaotic difference equations in two variables and their multidimensional perturbations," *Nonlinearity*, 21, 1019-1040 (2008).
- [3] M. Malkin, K. Safonov, "Entropy charts and bifurcations for Lorenz maps with infinite derivatives," *Chaos*, 31 (4), 043107 (1-17), (2021).

Exact solution of one integro-differential equation by means of operator semigroups

I. A. Maruseev¹, A. E. Rassadin¹

¹ Faculty of Informatics, Mathematics, and Computer Science,
Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics, Russia
brat_ras@list.ru

Let us consider the following integro-differential equation:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \mu^2 u(x, t) - \int_0^x (x - \xi - 2\mu) u(\xi, t) d\xi = 0, \quad x \in [0, l], \quad \mu > 0, \quad (1)$$

provided by the next initial conditions:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v_0(x). \quad (2)$$

It is easy to check that one can rewrite the Cauchy problem (1)-(2) as follows:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - (A - \mu I)^2 u = 0, \quad u(0) = u_0 \in C[0, l], \quad \frac{du(0)}{dt} = v_0 \in C[0, l], \quad (3)$$

where $A : C[0, l] \rightarrow C[0, l]$ is the Volterra operator:

$$(A u)(x) = \int_0^x u(\xi) d\xi \quad (4)$$

and I is the identity operator.

It is not difficult to see that exact solution of the Cauchy problem (3) is equal to:

$$u(t) = e^{-\mu t} e^{At} u_0^+ + e^{\mu t} e^{-At} u_0^-, \quad (5)$$

where functions

$$u_0^\pm = \frac{u_0 \pm R_\mu(A) v_0}{2} \quad (6)$$

are expressed via the initial conditions (2) by means of the resolvent $R_\mu(A) = (A - \mu I)^{-1}$ of linear operator (4):

$$(R_\mu(A) v_0)(x) = -\frac{v_0(x)}{\mu} - \frac{1}{\mu^2} \int_0^x \exp\left[\frac{x-\xi}{\mu}\right] v_0(\xi) d\xi. \quad (7)$$

Further using properties of operator (4) it is easy to calculate explicitly operators of semigroups $\{e^{At}\}_{t \geq 0}$ and $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$ corresponding to their infinitesimal generators A and $-A$, namely:

$$(e^{At} f)(x) = f(x) + \sqrt{t} \int_0^x \frac{I_1(2\sqrt{t(x-\xi)})}{\sqrt{x-\xi}} f(\xi) d\xi \quad (8)$$

and

$$(e^{-At} f)(x) = f(x) - \sqrt{t} \int_0^x \frac{J_1(2\sqrt{t(x-\xi)})}{\sqrt{x-\xi}} f(\xi) d\xi, \quad (9)$$

where $f(x)$ is arbitrary function from functional space $C[0, l]$ and $I_1(z)$ and $J_1(z)$ are modified Bessel function of the first kind and Bessel function of the first kind respectively.

Thus formulas (5)-(9) give one exact solution of the input Cauchy problem (1)-(2).

These formulas are sharply simplified if one impose on functions (6) some restrictions, namely, if one set $u_0^- = 0$ then

$$v_0(x) = (Au_0)(x) - \mu u_0(x) \quad (10)$$

and

$$u(t) = e^{-\mu t} e^{At} u_0. \quad (11)$$

If one set $u_0^+ = 0$ then

$$v_0(x) = \mu u_0(x) - (Au_0)(x) \quad (12)$$

and

$$u(t) = e^{\mu t} e^{-At} u_0. \quad (13)$$

In particular, one can choose:

$$u_0(x) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad \alpha > 0, \quad (14)$$

where $\Gamma(\alpha + 1)$ is the gamma function.

Combining formulas (8), (10), (11) and (9), (12), (13) with formula (14) one can derive respectively that:

$$u(x, t) = e^{-\mu t} \left(\frac{x}{t} \right)^{\alpha/2} I_\alpha(2 \sqrt{xt}) \quad (15)$$

and

$$u(x, t) = e^{\mu t} \left(\frac{x}{t} \right)^{\alpha/2} J_\alpha(2 \sqrt{xt}). \quad (16)$$

In the report presented graphs of exact solutions (15) and (16) of input equation (1) also have been demonstrated.

The effect of diffusion on the passive solute transport into an infinite two-dimensional array of vortices

B. S. Maryshev^{1,2}, L. S. Klimenko^{1,2}

¹ Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm Russia

² Theoretical physics department, Perm State University, Perm, Russia

bmaryshev@mail.ru

The transport of passive particles ensemble in complex hydrodynamic flows has significant deviations from the classical diffusion law [1]. Thus, the complex flow contains the stagnation points. The particle trajectory approaches such a point, the time it takes to travel a given distance tends to infinity. It is shown in [1] that flow with vortices always contains the stagnation points. For modelling such flow we cover the infinite plane by square cells with periodic conditions at their boundaries. The flow is provided by a periodic external force. If the amplitude of the external force exceeds a certain critical value, the flow in each cell contains a pair of vortices. Analysis of particle transport is performed in terms of the special flow [2]. In the framework of this approach the transport process is described by mapping functions that determine the coordinates of the particle at the exit from the unit cell and the time of passage through the cell as a function of coordinates at the entrance to the cell. These functions are obtained numerically by the random walk method. Using the special flow approach, the time evolution of the distribution in the initially uniform ensemble of passive particles is calculated for a passage through long array of unit cells. For tiny values of diffusivity the transport with slowdown of some particles relative to the ensemble is observed. This effect can be interpreted as subdiffusive transport. The speed up of some particles relative to the ensemble, observed for moderate values of diffusivity, can be interpreted as superdiffusive transport. In the case of high diffusivity values we obtain the standard diffusion.

The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No 121112200078-7).

- [1] M. A. Zaks, A. S. Pikovsky, J. Kurths, PRL. 77(21) 4338 (1996).
- [2] M. A. Zaks, A. Nepomnyashchy, PNAS. 116(37) 18245-18250 (2019)

О сложной динамике в сильно нелинейных (виброударных) системах

В. С. Метрикин¹, И. В. Никифорова¹

¹ Кафедра прикладной математики,

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Россия

irina.nikiforova@itmm.unn.ru

Разнообразие задач, в которых приходится исследовать динамику математических моделей с разрывными нелинейностями, необычайно широко. Это и системы с сухим трением, виброударные, релейные, системы с переменной структурой, многочисленные механические и радиотехнические системы с негладкими характеристиками отдельных элементов и др. Разработка теории и методики расчета таких устройств весьма актуальна для многих областей современного машиностроения. Эта проблема представляет, в частности, значительный интерес в задачах вибroteхники и теории виброударных систем, где наибольший интерес вызывает исследование конечноударных и бесконечноударных периодических режимов движения, изучение условий существования которых проводится, как правило, в предположении гармонического характера внешней силы [1]. При этом разбиение пространства параметров на области существования бесконечноударных периодических движений различной кратности осуществляется с помощью приближенного исследования. В данной работе показывается, что, когда внешняя сила меняется по закону прямоугольного синуса с произвольной скважностью, уравнения границ существования

периодических режимов можно определить с помощью точных аналитических формул [2]. Это позволяет относительно просто оценить влияние формы импульсной внешней силы на величину и взаимное расположение в пространстве основных параметров задачи областей существования режимов с периодом различной кратности.

- [1] Нагаев Р.Ф. Общая задача о квазипластическом ударе. Изв. АН СССР. МТТ, 1971. № 3. С. 94–103.
- [2] Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: ЛИБРОКОМ, 2010.

Частотная зависимость переключений мемристивного устройства и его использование в задачах нейроморфной электронники

**М. А. Мищенко^{1,2}, А. В. Лебедева², А. В. Бельтиюкова²,
Д. И. Большаков^{1,2}, В. И. Лукоянов², Д. С. Королев²,
А. И. Белов², Д. В. Гусейнов², В. В. Матросов^{1,2},
В. Б. Казанцев^{2,3,4}, А. Н. Михайлов²**

¹ Научно-образовательный Математический центр

“Математика технологий будущего”,

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Нижний Новгород, Россия,

² Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Нижний Новгород, Россия,

³ Самарский государственный медицинский университет, Самара, Россия,

⁴ Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта,
Калининград, Россия

Исследование и проектирование нейроморфных устройств является актуальной проблемой современной междисциплинарной науки [1]. При разработке таких устройств исследуются различные архитектуры спайковых нейронных сетей, воспроизводящие известную из биологических экспериментов динамику. При этом существенным является исследование процессов самоорганизации и адаптации к изменяющимся условиям, которая становится возможной за счет свойств пластиности связей [2, 3]. Мемристивные устройства, обладающие собственной нетривиальной динамикой, способны выполнять ключевую роль в нейроморфных системах, воспроизводя механизмы синаптической пластиности [4].

В данной работе исследована модель мемристивного устройства на основе $Au/Ta/ZrO_2(Y)/Ta_2O_5/TiN/Ti$ и экспериментально и численно показана частотная зависимость его переключений [2]. Эффект состоит в снижении скорости обучения (достижения заданного состояния мемристора) при увеличении частоты входных импульсов. Полученный результат является основой для воспроизведения динамического синапса или эффекта кратковременной синаптической пластиности. Последняя проявляется в изменении эффективности синапса в течение времени таким образом, что текущая эффективность отражает историю пресинаптической активности.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (Грант №. 21-11-00280).

- [1] A. Mikhaylov, A. Pimashkin, Ya. Pigareva, S. Gerasimova, E. Gryaznov, S. Shchanikov, A. Zuev, M. Talanov, I. Lavrov, V. Demin, V. Erokhin, S. Lobov, I. Mukhina, V. Kazantsev, H. Wu, B. Spagnolo, *Frontiers in Neuroscience* 14, 358 (2020).
- [2] S.A. Gerasimova, A.N. Mikhaylov, A.I. Belov, D.S. Korolev, O.N. Gorshkov, V.B. Kazantsev, *Technical Physics*, 62(8), 1259–1265 (2017).
- [3] A.G. Korotkov, A.O. Kazakov, T.A. Levanova, *The European Physical Journal Special Topics*, 228(10), 2325–2337 (2019).

- [4] M. Mishchenko, D. Bolshakov, V. Lukyanov, D. Korolev, A.I. Belov, D. Guseinov, V. Matrosov, V. Kazantsev, A.N. Mikhaylov, J. Phys. D: Appl. Phys. <https://doi.org/10.1088/1361-6463/ac79de> (2022).

Degenerate resonances and synchronization in nearly Hamiltonian systems under quasiperiodic perturbations

K. E. Morozov¹

¹ *Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia*

kirill.morozov@itmm.unn.ru

Quasiperiodic nonconservative perturbations of two-dimensional nonlinear Hamiltonian systems are considered. The definition of a degenerate resonance is introduced and the topology of a resonance zone with an odd order of degeneracy is studied. The case, when the order of degeneracy is even, was considered in [1]. Particular attention is paid to the synchronization process during the passage of an invariant torus through the resonance zone. The existence of so-called synchronization intervals is proved and new phenomena, which have to do with synchronization, are found. The study is based on the analysis of a pendulum-type averaged system that determines the dynamics nearby the resonance phase curve of the unperturbed system in accordance with the Bogolubov theorems [2].

The work was supported by the Russian Science Foundation (Grant No. 19-11-00280).

- [1] Morozov, A. D. and Morozov, K. E., "Synchronization of quasiperiodic oscillations in nearly Hamiltonian systems: The degenerate case", *Chaos* 31, 083109 (2021) <https://doi.org/10.1063/5.0055262>.
- [2] Bogolubov, N. N. and Mitropolskiy, J. A. *Asimptotic methods on the theory of nonlinear oscillations*, Moscow: Fizmatgiz, 1958 (in Russian).

Особенности обобщенной синхронизации в системах с различной топологией аттрактора

О. И. Москаленко¹, А. А. Короновский¹,
Е. В. Евстифеев¹, В. А. Ханадеев¹

¹ Научно-образовательный математический центр

“Математика технологий будущего”

ФГБОУ ВО “СГУ имени Н.Г. Чернышевского”, Саратов, Россия
o.i.moskalenko@gmail.com

Одним из наиболее интересных и наименее изученных типов хаотического синхронного поведения является режим обобщенной синхронизации [1]. Он может наблюдаться как в односторонне, так и взаимно связанных системах, в том числе с различной размерностью фазового пространства, и означает установление функционала между состояниями этих систем [1, 2]. Для диагностики данного режима во взаимодействующих системах в настоящее время предложены различные методы и подходы, среди которых наибольшее распространение получили методы ближайших соседей и фазовых трубок [1, 2], расчет спектра показателей Ляпунова [3] и метод вспомогательной системы [4]. Работоспособность того или иного метода и подхода сильно зависит от типа связи между системами и топологии аттракторов взаимодействующих систем. В частности, известно, что метод вспомогательной системы оказывается работоспособным только в случае односторонней связи между системами [5], а применение метода ближайших соседей к системам со сложной топологией аттрактора приводит к некорректным результатам [6].

На границе обобщенной синхронизации наблюдается, как правило, перемежающееся поведение – режим перемежающейся обобщенной синхронизации. В рамках данного доклада рассматриваются особенности этого режима, характерные для односторонне и взаимно связанных систем. В работе будет показано, что тип перемежаемости, реализуемый в данном случае, не зависит от типа связи между системами: и в случае односторонней, и при взаимной связи между системами на

границе обобщенной синхронизации имеет место один и тот же тип перемежаемости. Однако, тип перемежаемости существенным образом зависит от топологии аттракторов взаимодействующих систем. Например, для систем с относительно простой топологией аттрактора на границе обобщенной синхронизации наблюдается перемежаемость “on-off”-типа, в то время как для систем со сложной (двухлистной) структурой аттрактора имеет место перемежаемость перескоков. При этом, для режима перемежающейся обобщенной синхронизации характерна мультистабильность, причем данный тип поведения присущ и однонаправленно, и взаимно связанным системам с различной топологией их аттракторов. Для выявления наличия мультистабильности и определения характеристик перемежаемости предложены различные методы и подходы, основанные на модификации методов вспомогательной системы и расчета локальных показателей Ляпунова. Основные результаты проиллюстрированы на примере осцилляторов Ресслера, систем Лоренца и логистических отображений с различными типами связи.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – докторов наук (проект № МД-18.2022.1.2).

- [1] N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, H. D.I. Abarbanel, Phys. Rev. E. 51 (2), 980-994 (1995).
- [2] A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, A. E. Hramov, Phys. Rev. E. 84 (3), 037201 (2011).
- [3] K. Pyragas, Phys. Rev. E. 56 (5) 5183-5188 (1997).
- [4] H. D.I. Abarbanel , N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, Phys. Rev. E. 53 (5) 4528-4535 (1996).
- [5] O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, Phys. Rev. E. 87 064901 (2013).
- [6] О. И. Москаленко, В. А. Ханадеев, А. А. Короновский, Письма в ЖТФ. 44 (19) 87-95 (2018).

Splay states in the second-order Kuramoto model

V. O. Munyayev¹, M. I. Bolotov¹,
L. A. Smirnov¹, G. V. Osipov¹, I. V. Belykh²

¹ *Scientific and Educational Mathematical Center “Mathematics of Future Technologies”,*

Department of Control Theory, Nizhny Novgorod State University, Russia

² *Department of Mathematics and Statistics, Georgia State University, USA*

vmunyayev@gmail.com

The collective dynamics of coupled phase oscillators is one of the central areas of research in nonlinear dynamics and related interdisciplinary fields of science. The importance of such systems relies on the fact that any system of weakly interacting nonlinear oscillators can be studied within the phase approximation framework. One of the most popular phase oscillator models is the Kuramoto model and its extensions, which is due to their relative mathematical simplicity and many applications in the field of science and technology, including molecular biology, neuroscience [1] and power grids [2]. To characterize the degree of phase oscillators synchronization within the Kuramoto model the order parameter, a complex value determining the degree of phase coherence of the elements, is often used.

We consider the second-order Kuramoto model of N globally coupled phase oscillators:

$$m\ddot{\theta}_n + \dot{\theta}_n = \omega + \text{Im} [R_1(t) e^{-i(\theta_n + \alpha)}], \quad R_1(t) = \frac{1}{N} \sum_{\tilde{n}=1}^N e^{i\theta_{\tilde{n}}}, \quad (1)$$

where variables θ_n , $n = 1, \dots, N$ represent the oscillators' phases. The oscillators are assumed to be identical, with identical frequency ω , inertia m , and phase lag $\alpha \in [0, \pi]$. The quantity R_1 is called the first order parameter. In this work a general analytical analysis of the existence and stability of states characterized by a zero first order parameter, $R_1 = 0$, which can be regarded as generalized splay states [3], was performed.

We found explicit conditions for linear stability of generalized splay states with $R_1 = 0$, which depend not only on the system parameters α and m , but also on the second order

parameter $R_2 = \frac{1}{N} \sum_{\tilde{n}}^N e^{2i\theta_{\tilde{n}}}$, which can take different values depending on the specific configuration of its phases. In particular, it follows from the analysis that in the absence of inertia m , i.e. in the case of the first-order Kuramoto model, any state with $R_1 = 0$ is stable at repulsive coupling ($\alpha > \pi/2$). The manifestation of inertia is interesting: with nonzero m , generalized splay state is stable iff its second order parameter R_2 is lying in the specific range determined by the parameters of the system α, m . This range strongly depends on the elements number N parity. As a consequence, at an even number of elements N the existence region of stable states with $R_1 = 0$ is defined by $\alpha > \pi/2$ (similar to the first-order Kuramoto model); at an odd number of elements N this region decreases with increasing inertia m . In addition, the presence of inertia m leads to the realization of strictly defined two- and three-cluster states on the boundaries of these regions, respectively. The effect of inertia on the phase configuration of the realizing generalized splay state disappears far from these boundaries, i.e. with repulsive coupling increasing and is little noticeable with $\alpha \sim \pi$.

It is numerically shown that the generalized splay states with $R_1 = 0$ are inhomogeneity- and noise-robust.

The work was supported by the Russian Science Foundation (Grant No. 22-12-00348, numerical analysis), the Scientific and Education Mathematical Center “Mathematics for Future Technologies” (Project No. 075-02-2022-883, analytical results).

- [1] M. Breakspear, S. Heitmann, A. Daffertshofer, *Front. Hum. Neurosci.* 4, 190 (2010).
- [2] G. Filatrella, A. H. Nielsen, N. F. Pedersen, *Eur. Phys. J. B* 61, 485 (2008).
- [3] R. Berner, S. Yanchuk, Y. Maistrenko, E. Schöll, *Chaos* 31, 073128 (2021).

Dynamics of the Chaplygin sphere on a moving plane

E. N. Pivovarova¹, A. A. Kilin¹

¹ Ural Mathematical Center, Udmurt State University, Russia

archive@rcd.ru, kilin@rcd.ru

In recent years there has been an increasing body of research devoted to analysis of the dynamics of rigid bodies on nonstationary surfaces, for example, rotating or vibrating ones. The motion of bodies on moving surfaces can be accompanied by various interesting dynamical phenomena. For example, nontrivial behavior is observed in the case of a sphere moving across a rotating circular table: the incoming and the outgoing trajectory of the sphere are exactly identical [1, 2]. In the system describing the rolling motion of a sphere on a rotating plane there exists an additional Jacobi integral [3], which is an analog of the energy integral in a rotating coordinate system. In [4] it is shown that, when a sphere rolls on the surface of a rotating hyperbolic paraboloid, it performs a stable rotation at the vertex of the saddle. In the case of a vibrating surface, a topic of interest is, for example, the phenomenon of energy harvesting, which is described in the papers [5, 6] concerned with rattleback dynamics. Among the studies of the dynamics of spherical bodies we mention the paper [7], where the dynamics of the sphere on an oscillating surface of complex form is modeled. The dynamics and the nonintegrability of problems concerning the motion of spherical tops on a vibrating plane are examined in [8, 9]. In [10], a stability analysis is made and the problems of stabilization of vertical rotations of a spherical robot with an axisymmetric pendulum are addressed. In [10], special attention is also given to the problem of a spherical robot moving on a vibrating plane without losing contact with it.

Here we analyze the dynamics of the Chaplygin sphere on a plane which performs horizontal periodic oscillations. We construct a mathematical model of the rolling motion of the sphere, find first integrals of motion and perform a reduction to their common level set. We find steady-state solutions (nonuniform permanent rotations) of the reduced system. We also find a special integrable case of the problem considered and show that

the trajectories of this case are isomorphic to those of the problem of a sphere rolling on a fixed plane.

We also consider the control of the motion of the Chaplygin sphere on a plane performing horizontal periodic oscillations. The motion of the sphere is controlled by the controlled rotation of the internal gyrostats. The work addresses two control problems concerning the construction of controls which generate motion along a trajectory given either on a moving plane or in a fixed frame of reference. In particular, we prove that this system, like that treated in [11], is completely controllable on the zero level set of the angular momentum integral. We also present a motion control algorithm and give examples of the generation of some steady motions.

The work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of Russia (FEWS-2020-0009).

- [1] Gersten J., Soodak H., Tiersten M. S., *Amer. J. Phys.* 60(1), 43–47 (1992).
- [2] Lévy-Leblond J.-M., *Eur. J. Phys.* 7(4), 252–258 (1986).
- [3] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A., *Regul. Chaotic Dyn.* 20(3), 383–400 (2015).
- [4] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S., *Regul. Chaotic Dyn.* 23(3), 339–354 (2018).
- [5] Nanda A., Singla P., Karami M. A., *J. Sound Vibration* 369, 195–208 (2016).
- [6] Awrejcewicz J., Kudra G., *Procedia IUTAM* 22, 229–236 (2017).
- [7] Udwadia F. E., Di Massa G., *Simul. Model. Pract. Theory* 19(4), 1118–1138 (2011).
- [8] Borisov A. V., Ivanov A. P., *Regul. Chaotic Dyn.* 25(6), 707–715 (2020).
- [9] Kilin A. A., Pivovarova E. N., *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki* 30(4), 628–644 (2020).
- [10] Kilin A. A., Pivovarova E. N., *Regul. Chaotic Dyn.* 25(6), 729–752 (2020).
- [11] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S., *Regul. Chaotic Dyn.* 17(3–4), 258–272 (2012).

Impact of noise on the existence of chimera states in networks of nonlocally coupled maps

E. V. Rybalova¹, V. A. Nechaev¹, G. I. Strelkova¹

¹ Institute of Physics, Saratov State University, Saratov, 410012, Russia

rybalovaev@gmail.com

Random fluctuations are unavoidable in real-world systems. They can appear as intrinsic noise or alternatively can be implemented as external random perturbations. Studying system responses on noise influence are very important from a viewpoint of stability of operating modes, predicting and controlling the functioning of a majority of life-significant systems, such as infrastructure systems, power grids, transport networks, communication and information systems, biological, epidemiological, economic and social networks, etc.

The robustness of chimera states with respect to noise was investigated in nonlocally coupled networks of discrete-time maps with Gaussian and uniformly distributed parameters [1, 2] and in the presence of additive and multiplicative noise [3, 4, 5], as well as in networks of continuous-time systems [6, 7, 8]. In particular, it has been demonstrated that noise can induce the appearance of novel chimera patterns, such as coherence-resonance chimeras in a ring network of FitzHugh-Nagumo neurons [7], or new spatio-temporal patterns, e.g., solitary states and solitary state chimeras in a network of nonlocally coupled Henon maps [9]. The dependence of the chimera lifetime on the noise was studied in nonlocally coupled networks of periodic and chaotic oscillators [8, 10, 4]. It was shown that amplitude chimeras are long-living transients and can be controlled by noise influence. Nevertheless, it is still not completely understood how the probability of observing chimera states in networks of nonlocally coupled chaotic oscillators depends on the additive noise intensity, the coupling strength, and random initial conditions.

We study numerically the spatio-temporal dynamics of ring networks of coupled discrete-time systems in the presence of additive noise. The robustness of chimera states with respect to noise perturbations is explored for two ensembles in which the individual

elements are described by either logistic maps or Hénon maps in the chaotic regime. Numerical simulations are performed for a set of different noise realizations and random initial conditions to provide reliable statistical data. The type of dynamics of the considered networks is quantified by using a cross-correlation coefficient. We find that there is a finite and sufficiently wide region with respect to the coupling strength and the noise intensity where the probability of observing the chimera states is high.

The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 20-12-00119).

- [1] A.K. Malchow, I. Omelchenko, E. Schöll, P. Hövel, Physical Review E 98(1), 012217 (2018).
- [2] V.A. Nechaev, E. V. Rybalova, G. I. Strelkova, Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics 29(6), 943-952 (2021).
- [3] A. V. Bukh, A. V. Slepnev, V. S. Anishchenko, T. E. Vadivasova, Regular and Chaotic Dynamics 23(3), 325-338 (2018).
- [4] E. V. Rybalova, D. Y., Klyushina, V. S. Anishchenko, G. I. Strelkova, Regular and Chaotic Dynamics 24(4), 432-445 (2019).
- [5] N. N. Nikishina, E. V. Rybalova, G. I. Strelkova, T.E. Vadivasova, Regular and Chaotic Dynamics. – 2022. – V. 27. – no 2. – P. 242-251.
- [6] I. Omelchenko, A. Provata, J. Hizanidis, E. Schöll, P. Hövel, Physical Review E 91(2), 022917 (2015).
- [7] N. Semenova, A. Zakharova, V. Anishchenko, E. Schöll, Physical review letters 117(1), 014102 (2016).
- [8] A. Zakharova, S. Loos, J. Siebert, A. Gjurchinovski, E. Schöll, IFAC-PapersOnLine 48(18), 7-12 (2015).
- [9] A. Bukh, E. Rybalova, N. Semenova, G. Strelkova, V. Anishchenko, Chaos 27(11), 111102 (2017).

- [10] N. I. Semenova, G. I. Strelkova, V. S. Anishchenko, A. Zakharova, Chaos 27(6), 061102 (2017).

О гомоклинической бифуркации, приводящей к рождению аттрактора Ровеллы.

Сафонов К.А.^{1,2}, Казаков А.О.^{1,2}, Малкин М.И.^{1,2}

¹ Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,

² Лаборатория динамических систем и приложений,

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"

safonov.klim@yandex.ru

В докладе рассматривается бифуркация симметричных векторных полей, имеющих седловое состояние равновесия с единственным положительным собственным значением γ , при этом неустойчивые одномерные сепаратрисы стремятся к этому состоянию равновесия при $t \rightarrow +\infty$. Кроме того, предполагается, что состояние равновесия удовлетворяет резонансному соотношению $\gamma + \lambda = 0$, где λ обозначает ближайшее к нулю действительное собственное значение.

Л.П. Шильников заметил (см. [1]), что при выполнении дополнительного неравенства $0 < |A| < 2$ на сепаратрисную величину A возмущения таких векторных полей, при которых сумма $\gamma + \lambda$ становится положительной, приводят к рождению аттракторов лоренцевского типа. Доказательство данного результата основано на построении устойчивого инвариантного слоения и на последующем рассмотрении одномерного фактор-отображения вида

$$\bar{x} = (-1 + c|x|^\nu + o(|x|^\nu)) \cdot sign(x). \quad (1)$$

В докладе изучается возмущения описанных выше векторных полей, при которых величина $\gamma + \lambda$ становится отрицательной. Будет показано, что при выполнении

неравенства $|A| > 1$ рождается так называемый аттрактор Ровеллы (см. [2]). Будет доказано существование инвариантного слоения, с помощью которого задача будет сведена к изучению фактор-отображения (1). Далее, используя идеи Бенедикса и Карлесона [3], будет доказано существование множества положительной меры, принадлежащего плоскости параметров (c, ν) и соответствующего хаотической динамике для отображения (1).

Отметим, что инвариантное слоение и фактор-отображение являются только $C^{1+\varepsilon}$ -гладкими, где величина ε определяется собственными значениями O . Это факт не позволяет непосредственно применить технику из работы [3] для нашего случая. В докладе будут приведены необходимые обобщения и принципиальные различия для $C^{1+\varepsilon}$ -отображений.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 19-11-00280.

- [1] Shilnikov L. P. The bifurcation theory and quasi-hyperbolic attractors // Uspehi Mat. Nauk, 1981, V. 36, p. 240-241.
- [2] A. Rovella. The dynamics of perturbations of the contracting Lorenz attractor // Boletim da Sociedade Brasileira de Matematica-Bulletin/Brazilian Mathematical Society, 1993, V. 24(2), p. 233-259.
- [3] M. Benedicks, L. Carleson. The dynamics of the Henon map. // Annals of Mathematics, 1991, V. 133(1) p. 73-169.

Effect of global coupling on the synchronization of Josephson junctions by common noise

A.E. Samoilova ^{1,2}, D.S.Goldobin^{1,2}

¹ *Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Russia,*

² *Theoretical Physics Department, Perm State University, Russia*

annsomeoil@gmail.com

The Ott–Antonsen theory [1] provides exact equations of the dynamics of order parameters for an important class of networks of phase elements. These equations made a ground for an advance in the theory of collective phenomena. In particular, a sophisticated nature of the interplay between the mechanisms of synchronization by common noise and coupling was reviled [1]-[4] and the counterintuitive phenomenon of the frequency repulsion accompanying synchronization was reported for a desynchronizing coupling [1]-[5]. Even though the dynamics of active rotators is reminiscent of that of superconducting Josephson junction, physically motivated forms of global coupling for active rotators and theta neurons [4] are not relevant for arrays of Josephson junctions [6]. In this work, we consider the effect of noise in the input current for a chain of Josephson junctions [6]. The physical properties of this system are such that both the global coupling and the common noise in this system will have a special form: because of which the communication turns out to be reactive, and the common noise does not have a synchronizing effect in the leading order. For this system, it turns out to be possible to construct a description within the framework of the OA theory in the absence of intrinsic noise and a two-cumulant approximation if it is present. For the case of identical oscillators, it has been found that the reactive coupling, which on itself does not make a synchronizing effect, and the common noise, which does not synchronize in the leading order, together can make the synchronous state highly attracting. Within the framework of the Ott–Antonsen theory and the two-cumulant model, the phenomenon of synchronization and the behavior of the order parameter in the system are described.

The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. 121112200078-7).

- [1] E. Ott, T.M. Antonsen, Chaos 18, 037113 (2008).
- [2] A.V. Pimenova, D.S. Goldobin, M. Rosenblum, A.Pikovsky, Sci. Rep. 6, 38518 (2016).
- [3] D.S. Goldobin, A.V. Pimenova, M. Rosenblum, A. Pikovsky, Eur. Phys. J. ST 226(9), 1921-1937(2017).
- [4] A.V. Dolmatova, D.S. Goldobin, A. Pikovsky, Phys. Rev. E 96, 062204 (2017).
- [5] D.S. Goldobin, A.V. Dolmatova, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 75, 94-108 (2019).
- [6] S.A. Marvel, S.H. Strogatz, Chaos 19, 013132 (2009).

**Анализ особенностей нестационарного поведения контуров
автономной регуляции кровообращения у разных групп
пациентов с Covid-19**

В. В. Сказкина¹, К. А. Попов²

¹ Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н.Г. Чернышевского, Россия

² Саратовский государственный медицинский университет
им. В.И.Разумовского, Россия
skazkinavv@yandex.ru

Работа посвящена исследованию особенностей нестационарного поведения контуров автономной регуляции кровообращения у разных групп пациентов с Covid-19:

с и без артериальной гипертензии. Были изучены 20-минутные сигналы электрокардиограммы и фотоплетизмограммы. В работе была исследована фазовая динамика сигналов автономного контроля сердечного ритма и артериального давления. Данные пациентов с хронической артериальной гипертензией показали меньший уровень синхронизации, чем пациенты без нее: $17.57\% \pm 4.92\%$ против $38.36\% \pm 8.87\%$. Это может быть связано с повышенной секрецией белка ACE-2, что характерно для пациентов с хронической артериальной гипертензией. Стоит отметить, что пациенты с Covid-19 и без гипертензии демонстрировали меньшую степень связности исследуемых контуров, чем контрольная группа здоровых испытуемых[1]. Таким образом, в работе показано, что изучение фазовой динамики сигналов сердечно-сосудистой системы может дать новую информацию об изменениях механизмов автономной регуляции кровообращения при развитии вируса Covid-19.

Работа выполнена при поддержке Стипендии Президента Российской Федерации СП-2261.2021.4.

- [1] V. V. Skazkina, N. S. Krasikova, E. I. Borovkova, Yu. M. Ishbulatov, A. Yu. Gorshkov, A. I. Korolev, V. A. Dadaeva, A. A. Fedorovich, A. V. Kuligin, O. M. Drapkina, A. S. Karavaev, A. R. Kiselev, Russian Open Medical Journal 10, e0307(2021).

Relating causality quantifiers for processes to oscillation-theoretic effects of directional couplings

D. A. Smirnov

Saratov Branch, V.A. Kotelnikov Institute of RadioEngineering and Electronics RAS,

38 Zelyonaya St., Saratov 410019, Russia

smirnovda@yandex.ru

Revealing couplings between evolving systems is the main topic of many studies in linear and nonlinear time series analysis, e.g. [1, 2]. First, one aims at detecting whether a system Y influences a system X or, in other words, whether there is a causal (also called directional) coupling $Y \rightarrow X$. This is the problem of “coupling detection” or “causal discovery”. If “yes”, one almost inevitably asks whether such a coupling is strong in some sense. This is the problem of “quantitative characterization of directional coupling” or “estimation of causality quantifiers”. Numerous causality quantifiers have been developed and are still being suggested, such as transfer entropy[1], spectral causalities, phase-dynamic characteristics [2] and many others. They are used everywhere, from nuclear reactors and communication to neuroscience and climate science. Any of those quantifiers is often considered or newly introduced as a separate measure, independent of the others and valuable *per se*. A resulting controversy is that any causal coupling in a complex system may be stronger than couplings in other directions according to one quantifier and weaker according to another quantifier [3]. There are many other doubts and discussions about relevance and meaning of different quantifiers.

One often argues that the causal language and causal interpretations in time series analysis may often be improper, and so it may be preferable to refuse the very term “causality” in that field. Then, one suggests just to use any reasonable approach as “*a* (as opposed to *the*) notion of causality”. If so, several questions remain. How are many possible approaches interrelated? Is each of them equally valid? Which of them is a better tool to reveal and quantify causal couplings in a concrete study? To address all these issues systematically, a concrete formalism to derive various causality quantifiers

for processes from a well-grounded general concept of causality as from a “first principle” was recently suggested in [4]. This is a combination of Pearl’s interventional causality [5] and stochastic dynamical systems. There, the concept of dynamical causal effect (DCE) shows how strongly a certain initial variation in a subsystem Y (in its parameter or in the distribution of its initial states) changes the future of a subsystem X . The general DCE was defined via the “triple brackets formula” with various specific causality quantifiers as its realizations. That approach allows one to find relations between various causality quantifiers and formulate them in a short and precise manner.

Based on that approach, one can now try to understand further the meaning of different causality quantifiers from the viewpoint of the oscillation theory. For that, it is reasonable to evaluate those quantifiers for paradigmatic coupled oscillatory systems in characteristic situations, e.g. in transitions between dynamical regimes or from a weak (in some relevant sense) oscillatory effect of the presence of the coupling $Y \rightarrow X$ to a strong one. Such an attempt is reported in this work. Transfer entropy, a short-term information-theoretic DCE, and spectral effects are computed precisely for a set of two coupled linear dissipative oscillators under the influence of white noise. Typical values of these causality quantifiers are found for situations where the coupling $Y \rightarrow X$ induces a very weak change in oscillatory dynamics of the subsystem X or quite a strong change, e.g. where introduction of the coupling leads to a strong amplitude modulation of the oscillations of X . These results improve our understanding of what values of causality quantifiers are large or small in terms of long-term oscillatory effects of a directional coupling. Thereby, this work may further contribute to the construction of a united theory of causality quantifiers for processes.

This work was carried out within the framework of the state task.

- [1] T. Schreiber, Phys. Rev. Lett. 85, 461-464 (2000).
- [2] M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, Phys. Rev. E 64, 045202(R) (2001).
- [3] D.A. Smirnov, Phys. Rev. E 90, 062921 (2014).
- [4] D.A. Smirnov, Phys. Rev. E 105, 034209 (2022).

- [5] J. Pearl, *Causality: Models, reasoning, and inference* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000).

Traveling chimeras in an oscillatory medium with advection-diffusion coupling

L. A. Smirnov¹, M. I. Bolotov¹, G. V. Osipov¹, A. Pikovsky²

¹ *Scientific and Educational Mathematical Center “Mathematics of Future Technologies”,*

Department of Control Theory, Nizhny Novgorod State University, Russia

² *Institute for Physics and Astronomy, University of Potsdam, Germany*

lev.smirnov@itmm.unn.ru

The dynamics of oscillator populations attracts much interest across different fields of science and engineering. One of the paradigmatic and universal objects of study is the model of nonlocally coupled phase oscillators. The theoretical and experimental investigations have shown that such systems possess so-called chimera states (symmetry broken states characterized by the coexistence of synchronous and asynchronous groups of oscillators). For the first time, chimera regimes were observed and explained by Kuramoto and Battogtokh (KB) [1]. They consider a ring of interacting phase oscillators with the exponential kernel. Then, Abrams and Strogatz [2] proposed the alternative version of the convolution operator kernel, which allowed them to describe chimeras semi-analytically using the Ott-Antonsen (OA) approach [3]. Note, in the works [4], it has been shown that for the KB model a number of theoretical results can be obtained by using just a generalization of the exponential kernel taking into account periodic boundary conditions on the ring. Chimera regimes, discovered almost 20 years ago, continue to be in the focus of theoretical and experimental studies [5].

Recently, in the article [6], the authors have studied AS model with asymmetry in nonlocal interaction of nonidentical phase oscillators (with different natural frequencies).

In this case, it have been found nontrivial patterns in the form of traveling waves moving at constant velocities and investigated them in detail. However, there is a diversity of particles of their natural frequencies in the considered model, and the case of a purely regular system was not treated. Hence, the possibility of such traveling waves in purely regular oscillatory media remains an open problem. Our work is aimed at bridging this gap.

We consider the model based on KB setup. In the continuum limit, our model can be written as a one-dimensional array of phase oscillators coupled via a complex diffusive mean-field. In this case, the dynamics of the phase $\varphi(x, t)$ of each unit is given by the following equation:

$$\partial_t \varphi = \omega + \text{Im} [H(x, t) e^{-i(\varphi+\alpha)}] \quad (1)$$

and the evolution of the coupling field $H(x, t)$ is governed by the following equation:

$$\tau \partial_t H = \partial_{xx}^2 H - 2q \partial_x H - k^2 (H - e^{i\varphi}) \quad (2)$$

with periodic boundary conditions. In the presenting research, we assume that there is advection of the coupling field in the system under consideration. This assumption makes the interaction between identical oscillators asymmetric. We also restrict ourselves to the case of very fast relaxation of the diffusion field. In this limit, the value terns to zero, and the phase dynamics can be written as an integro-differential equation.

For the model formulated as an integro-differential equation, we consider a finite set of oscillators at equidistant positions and approximate the integrals as sums and perform numerical simulations. Here, our strategy is as follows. In the case of symmetric coupling, using the OA approach, we find a spatially inhomogeneous profile of the local complex order parameter. Then, one can reconstruct the distribution of the randomized phases in a standing chimera regime. This procedure allows us to generate a finite sample of points in the form of a coherent-incoherent pattern, which appears to be stable for symmetric coupling kernel despite the deviations from the OA description. For a relatively small number of oscillators, such an initial state starts to move and transforms to a traveling chimera, with synchronous and asynchronous domains, after

the asymmetry in the coupling is switched on. Contrariwise, for a relatively large number of particles, on the same stages of evolution, a continuous spatial profile develops without a disordered domain, and a continuous profile of the phase distribution appears. On the other hand, this profile is strongly inhomogeneous. It has a smooth domain like the synchronous part of the standing chimera, and there is also a domain where the phase derivative is large. If we continue simulations, we see that this state is nearly an exact traveling wave. However, further evolution shows that the ideal picture gets destroyed because of a weak instability, and a weakly turbulent regime is observed, where one can see branches of continuous in space phases which are nonstationary (they move, merge, and create defects).

First, we focus on the stage, where one can observe a continuous phase distribution with a nearly permanent form moving at an approximately constant velocity. We develop a procedure allows one to exact solutions in the form of traveling waves for the KB setup. In this way, we obtain a family of traveling solutions with different velocities for the different advection parameters. We also analyze the stability of such phase profiles moving at constant velocities, and find that the most of them are weakly unstable.

The results of numerical simulations of the propagation of an exact traveling wave solution we found in the KB setup show these solutions do indeed propagate at a constant velocity with a permanent shape in long time intervals. However, at large times, the regular structure of this solution undergoes partial decay, and weak turbulence appears. Next, we investigate the properties of such weakly turbulent states. To this end, we can take one of an exact traveling wave profile with many continuous branches as initial conditions for direct numerical simulations. One characteristic feature is that we see continuous profiles of phases if the number of oscillators is large. To confirm this, we calculated the cross-correlation function of the phases. We also calculate the Lyapunov exponents spectrum for the regime with a weakly turbulent domain repeatedly run over the system and compare it with the Lyapunov spectrum for the standing chimera. For standard chimera, the maximal Lyapunov exponent decays with the number of elements in the system. This means that, for finite, but large numbers of oscillators, a stable KB chimera is weakly chaotic, and indicates the absence of chaos in the thermodynamic

limit. For traveling chimera, the maximal Lyapunov exponent becomes size-independent, what indicates on macroscopic chaos in the thermodynamic limit.

The work was supported by the Russian Science Foundation (Project No. 22-12-00348, numerical results), the Scientific and Education Mathematical Center “Mathematics for Future Technologies” (Project No. 075-02-2022-883, analytical results).

- [1] Y. Kuramoto, and D. Battogtokh, “*Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators*”, Nonlinear Phenom. Complex Syst. 5, 380 (2002).
- [2] D.M. Abrams, and S.H. Strogatz, “*Chimera States for Coupled Oscillators*”, Phys. Rev. Lett. 93, 174102 (2004).
- [3] E. Ott, and T.H. Antonsen, “*Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators*”, Chaos 18, 037113 (2008).
- [4] L.A. Smirnov, G.V. Osipov, and A. Pikovsky, “*Chimera patterns in the Kuramoto-Battogtokh model*”, J. Phys. A: Math. Theor. 50, 08LT01 (2017).
- [5] O.E. Omel’chenko, “*The mathematics behind chimera states*”, Nonlinearity 31, R121 (2018).
- [6] O.E. Omel’chenko, “*Travelling chimera states in systems of phase oscillators with asymmetric nonlocal coupling*”, Nonlinearity 33, 611 (2019).

Analysis of human brain activity during motor function activation after rTMS

N. M. Smirnov¹, S. A. Kurkin^{1,2}

¹ *Innopolis University,*

² *Immanuel Kant Baltic Federal University*

n.smirnov@innopolis.university

The brain is characterized by extreme complexity of the processes occurring in it [1]. Understanding these processes is also complicated by a tangled network of interdependencies between different areas and neuronal ensembles. One of the methods for analyzing such dependencies is to perturb certain areas of the brain by magnetic stimulation. This method helps to establish both the configuration of networks active in a particular task and the model of how these networks activate and deactivate [2].

In this work, we hypothesize that using repetitive transcranial magnetic stimulation (rTMS) [3], which stimulates a specific area of the brain, it is possible to change the configuration of the human brain networks before MI, what should be reflected in changed characteristics reflecting the processes affecting MI.

For the study, an experiment using rTMS and 32-channel EEG recording was performed, 30 healthy subjects were randomly divided into TMS and TMS sham groups. Each subject imagined right fist making during 20 trials before (session Im1) and after (session Im2) the stimulation. TMS power was set according to established MEP. We chose to stimulate the dorsolateral prefrontal cortex, since it is one of the hubs of activity during motor imagery, along with the motor area [4]. Previously, this area has not been stimulated to analyze MI.

The following eLORETA source analysis [5] revealed the significant change in θ -power in Precuneus R for TMS group, which is the part of the default mode network [6]. We also assessed the subjects' reaction time using an algorithm based on cluster permutation test. A strong correlation was found between Precuneus R θ -activation caused by TMS of left DLPFC and MI rate. This pattern of activity, i.e., CEN activation

and DMN deactivation, is usually observed during task performance and indicates greater attention to external stimuli and tasks and less attention to internal feelings and thoughts [7]. Obtained results may suggest that for a part of the group, TMS modulates these networks through DMN deactivation and CEN activation, which results in a transition to a focused state.

The study is supported by Russian Science Foundation (Grant 21-72-10121).

- [1] M. Salehi, A. Karbasi, D. S. Barron, D. Scheinost, R. T. Constable, NeuroImage 206, 116-233 (2020).
- [2] P. M. Rossini, S. Rossi, Neurology 68, 484-488 (2007).
- [3] M. Hallett, Neuron 55, 187-199 (2007).
- [4] R. M. Hardwick, S. Caspers, S. B. Eickhoff, S. P. Swinnen, Neuroscienc, Biobehavioral Reviews 94, 31-44 (2018).
- [5] R. D. Pascual-Marqui, Discrete, 3D distributed, linear imaging methods of electric neuronal activity. Part 1: exact, zero error localization (2007).
- [6] V. Menon, Trends in cognitive sciences 15, 483-506 (2011).
- [7] J. Kumar, S. J. Iwabuchi, B. A. Vollm, L. Palaniyappan, European Archives of Psychiatry and Clinical Neuroscience 270, 567-576 (2020).

Hyperchaotic attractors with three positive Lyapunov exponents in the three-dimensional Kaneko endomorphism

K. A. Soldatkin¹

¹ *National Research University Higher School of Economics,*

Russia

kasoldatkin@mail.ru

A hyperchaotic attractor is an attractor whose feature is the presence of more than one positive Lyapunov exponent. Recently, quite detailed results have been obtained on the mechanisms of occurrence of hyperchaotic attractors characterized by the presence of two positive Lyapunov exponents in the works [1] and [2]. However, it is completely unclear how attractors with three positive Lyapunov exponents can arise.

In this work, we propose scenarios for the occurrence of such attractors using a three-dimensional endomorphism proposed Kaneko as an example [3].

This work was supported by the RSF grant No. 19-71-10048.

- [1] Karatetskaia E., Shykhmamedov A., Kazakov A. Shilnikov attractors in three-dimensional orientation-reversing maps //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. - 2021. - T. 31. - 1. - C. 011102.
- [2] Shykhmamedov A. et al. Hyperchaotic attractors of three-dimensional maps and scenarios of their appearance //arXiv preprint arXiv:2012.05099. - 2020.
- [3] Kaneko K. Doubling of torus //Progress of theoretical physics. - 1983. - T. 69. - . 6. - C. 1806-1810.

Network regulation of neural activity by glial cells

S. V. Stasenko^{1,2}, V. B. Kazantsev^{1,3}

¹ *Scientific and Educational Mathematical Center “Mathematics of Future Technologies”, Department of Neurotechnology, Nizhniy Novgorod State University, Russia*

² *Institute of Applied Physics RAS, Nizhniy Novgorod, Russia*

³ *Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia*

stasenko@neuro.nnov.ru

The inclusion of astrocytes in the classical presynapse-postsynapse scheme led to the formation of the concept of a triple synapse [1, 2] based on the fact that glial cells (astrocytes) through calcium-dependent release of the gliatransmitter (glutamate) are able to act on the pre- and postsynaptic compartments of the synapse. When spikes are generated on a presynaptic neuron, a neurotransmitter (eg, glutamate) is released from the presynaptic terminal. A portion of the neurotransmitter may diffuse outside the synaptic cleft and bind to metabotropic glutamate receptors (mGluRs) on the astrocyte, which may be located near the presynaptic terminal. Activation of metabotropic glutamate receptors G-mediated leads to the formation of inositol-1,4,5-triphosphate (ITP). ITP diffuses inside the cell and binds to ITP-dependent endoplasmic

reticulum (ER) receptors and leads to the release of Ca^{2+} into the cytoplasm. An increase in free calcium in the astrocyte can lead to the release of gliatransmitters (eg, glutamate, adenosine triphosphate (ATP), D-serine, GABA) into the synaptic cleft and into the extrasynaptic space and a subsequent modulatory effect on synaptic transmission upon binding to pre- or postsynaptic receptors [3].

This work proposes a model for the regulation of network neuronal activity by glial cells - astrocytes. The neuron model is described by the Hodgkin-Huxley equations [4]. Neuron-glial interaction is described by the phenomenological approaches proposed in [5, 6]. The neural network consists of 900 neurons, 80% of which are excitatory neurons, 20% are inhibitory neurons. The probability of connection of excitatory neurons is 5%, the probability of connection of inhibitory neurons is 10%. External noise is applied to each neuron, having a uniform distribution from 0 to 1. An image is fed to the neural network for 100 ms, the pixels of which are converted into a current from 0 to 1, in a spatial scan on a layer of excitatory and inhibitory neurons. It was found that with the simultaneous supply of noise and a useful signal in the form of an image to a layer of neurons, random activation of neurons and blurring of the image on the raster diagram of neuronal activity occur. Activation of astrocytes leads to a decrease in the noise of neurons and an improvement in the image on the raster diagram. Thus, it was shown that astrocytes perform the function of filtering the useful signal, which is important in the perception of an external signal by the receptive field.

The work in terms of developing a mathematical model was supported within the framework of the Development Program of the Regional Scientific and Educational Mathematical Center "Mathematics of Future Technologies project No. 075-02-2020-1483/1 and in terms of data analysis by the grant of the President of the Russian Federation NSh-2256.2022.1.2.

- [1] Araque, A., Parpura, V., Sanzgiri, R. , Haydon, P. Trends Neurosci. 22, (1999).
- [2] Haydon, P. G. Nat. Rev. Neurosci. 2, 185-93 (2001).
- [3] Perea, G., Navarrete, M. , Araque, A. Trends Neurosci. 32, 421-431 (2009).
- [4] Hodgkin, A. L. , Huxley, A. F. J. Physiol. 117, 500-544 (1952).

- [5] Gordleeva, S. Y., Stasenko, S. V, Semyanov, A. V, Dityatev, A. E. , Kazantsev, V. B. Front. Comput. Neurosci. 6, 92 (2012).
- [6] Lazarevich, I. A., Stasenko, S. V. , Kazantsev, V. B. JETP Lett. 105, 210-213 (2017).

Влияние астроцитов на процессы обработки и хранения информации в спайковой нейронной сети

Ю. А. Цыбина¹, А. А. Заикин¹, С. Ю. Гордлеева¹

¹ Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
lotarevaj@gmail.com

Одной из фундаментальных задач современной нелинейной динамики является поиск динамических механизмов сетевой сигнализации, передачи и обработки информации в мозге. Современные представления о динамике нейронных систем связаны с процессами генерации сигналов отдельными клетками, формированием структур и волн за счет синаптических связей в сетевых моделях, вынужденными колебаниями в неавтономных системах. Один из последних трендов в нейронаучных исследованиях связан с исследованием эффектов воздействия на нейроны различных факторов внеклеточной среды. Эти факторы включают распределенные во внеклеточном пространстве нейроактивные вещества, выделяемые как самими нейронами, так и другими клетками в частности, глиальными клетками - астроцитами.

Исследование механизмов обработки информации в человеческом мозге, без всякого сомнения, является одной из самых важных научных задач текущего момента. В последние годы существенно возросли экспериментальные возможности, позволяющие получать детальную информацию о функционировании различных систем мозга от молекулярно-генетического до клеточно-сетевого уровня. Это, в частности,

позволяет не только приблизиться к пониманию функционального значения исследуемых систем, но и придает особую актуальность задаче разработки математического аппарата для количественного описания данных, формирования и проверки гипотез наблюдаемых эффектов. Разработка адекватных биолого-релевантных математических моделей функционирования систем мозга на клеточном, и особенно на сетевом уровне крайне важна как для ответов на фундаментальные научные вопросы, так и в качестве базы для новых практических применений - в медицине, робототехнике и в развитии высокоэффективных информационных систем искусственного интеллекта, использующих принципы работы мозга.

В работе предложена биофизическая модель кратковременной памяти, реализуемая спайковой двухслойной нейрон-астроцитарной сетью. Нейронная сеть моделируется синаптически связанными нейронами Ижикевича [3]. Синаптическая пластичность в сети реализована как STDP процесс. Динамика внутриклеточной концентрации кальция в каждом астроците описывается моделью Уллаха [4]. Астроциты связаны локальными диффузионными связями и взаимодействуют с нейронами с помощью химических веществ, диффундирующих во внеклеточном пространстве. Повышение уровня кальция происходит в ответ на повышение концентрации нейротрансмиттера, высвобожденного импульсными нейронами, когда часть из них синхронно генерирует импульсы. В свою очередь, астроциты способны высвобождать глиопредатчики, которые модулируют силу синаптических контактов в группе нейронов взаимодействующих с данными астроцитами.

На основе разработанной биолого-релевантной спайковой нейрон-астроцитарной сети была исследована роль кальций-зависимой астроцитарной модуляции синаптической передачи в процессах обработки информации. Было показано, что локальная пространственная синхронизация активности в нейронной сети, индуцированная астроцитами на характерных временах повышения внутриклеточной концентрации кальция, может являться механизмом формирования кратковременной рабочей памяти в нейрон-астроцитарной сети.

[1] D.O. Hebb, *The Organization of Behavior*, John Wiley & Sons inc, (1949).

[2] A. Lansner, *Trends in neurosciences* 3, 178-186 (2009).

- [3] E. Izhikevich, IEEE transactions on neural networks, 14, 1569- 1572 (2003).
- [4] G. Ullah, P. Jung, A. Cornell-Bell, Cell Calcium 39, 197-208 (2006).

Phase description for oscillatory Soret-driven convection in adjoined porous cells

I. V. Tyulkina¹, D. S. Golodobin^{1,2}

¹ *Institute of Continuous Media Mechanics, UB RAS, Perm, Russia*

² *Perm State University, Perm, Russia*

irinatiulkina95@gmail.com

In studies of general patterns of the complex behavior of nonlinear systems, special attention is drawn to collective phenomena in ensembles of coupled elements, such as synchronization. The concept of phase is used to characterize synchronism. The dynamics of phase systems is of interest for many applications in physics, including hydrodynamics. The primary interest here is related to systems in which the intrinsic dynamics of the ensemble elements is simple, and complexity arises as a consequence of their network interaction. From the viewpoint of problems of control and self-organization, the most important situations are the ones where collective phenomena arise as a result of a weak coupling between elements or a weak driving of them. Previously [1], convective currents in a thin layer of a porous medium, caused by a localized source of heat or impurities, were studied, and the modes of behavior of the system were characterised. In [2], a collective phase description of oscillatory thermal convection in Hele-Shaw cells was constructed and the dynamics of oscillatory convection in the system was described.

In this work, we construct a description for oscillatory Soret-driven convection in adjoined porous cells heated from below. The horizontal boundaries of the cells are assumed to be impenetrable (including for impurities), and the heat flux through them

is fixed. Vertical boundaries have low thermal conductivity. The equations for thermal convection take into account the Soret effect. The oscillation phase equations are derived using the standard method of multiple scales. In the system under consideration, there is a term of a distributed heat source that describes the heat exchange between cells. From here we obtain the Soret convection equations in cells with a coupling through the temperature field. With employment of the standard method of multiple scales, equations for longwavelength convection can be derived. Then we derive the equations for the amplitude of the coupled oscillatory modes and from them obtain the equations for the phases of the oscillations, which are the key equations of the phase description. In the future, it is planned to apply the formalism of circular cumulants to this problem to describe the collective dynamics [3].

The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. 121112200078-7).

- [1] D.S. Goldobin, D.V. Lyubimov, Journal of Experimental and Theoretical Physics 104(5), 830-836 (2007).
- [2] Y. Kawamura, H. Nakao, Chaos 23, 043129 (2013).
- [3] I.V. Tyulkina, D.S. Goldobin, L.S. Klimenko, A. Pikovsky, Phys. Rev. Lett. 120, 264101 (2018).

Exploring the dynamics after the transition to complex-saddle

Vieiro A.

Universitat de Barcelona

vieiro@maia.ub.es

In this talk, we will consider a one parameter family of 2-DOF Hamiltonian systems that have an equilibrium point that undergoes a Hamiltonian-Hopf bifurcation. We will

first briefly review the well-established normal form theory in this context. We will then focus on the homoclinic orbits to the complex-unstable equilibrium point and study the behavior of the splitting of the 2D invariant manifolds. In particular, we will show that a generic upper bound of the splitting behavior follows from the general results for near-the-identity area-preserving maps after considering a suitable Poincaré map. Finally, after discussing about the difficulties that arise when trying to derive a separatrix map to explore the dynamics near the 2D invariant manifolds, we will propose a separatrix map model to this end. We will illustrate the results for a concrete Hamiltonian system.

This work is in collaboration Ernest Fontich (UB).

.

**Об аттракторах лоренцевского типа в трехмерном
отображении с лоренцевской симметрией**

К. С. Зайчиков¹, А. С. Гонченко²

¹*НИУ “Высшая школа экономики”, Нижний Новгород, Россия*

²*НИУ ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия*

kszaychikov@edu.hse.ru, agonchenko@mail.ru

Аттрактор Лоренца – странный аттрактор, впервые найденный Э. Лоренцем в системе трех дифференциальных уравнений [1]. Данный аттрактор имеет дискретный аналог, впервые найденный и исследованный в работе [2]. Ранее, в работах [3], [4], были предложены бифуркационные сценарии рождения дискретного аттрактора Лоренца. В данной работе рассматривается отображение, предложенное С. В. Гонченко, являющееся модификацией трехмерного отображения Эно:

$$\begin{cases} \bar{x} = y \\ \bar{y} = \nu_1 x + \nu_2 y + Ayz \\ \bar{z} = \nu_3 z + By^2. \end{cases}$$

Здесь ν_1, ν_2, ν_3, A и B – параметры, а x, y и z – фазовые переменные. Данное отображение обладает “лоренцевской” симметрией $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$. Определитель матрицы Якоби отображения: $J = -\nu_1\nu_3$. В дальнейшем мы фиксируем $A = 1$, $B = -1$, а также определитель $J = 0.5$.

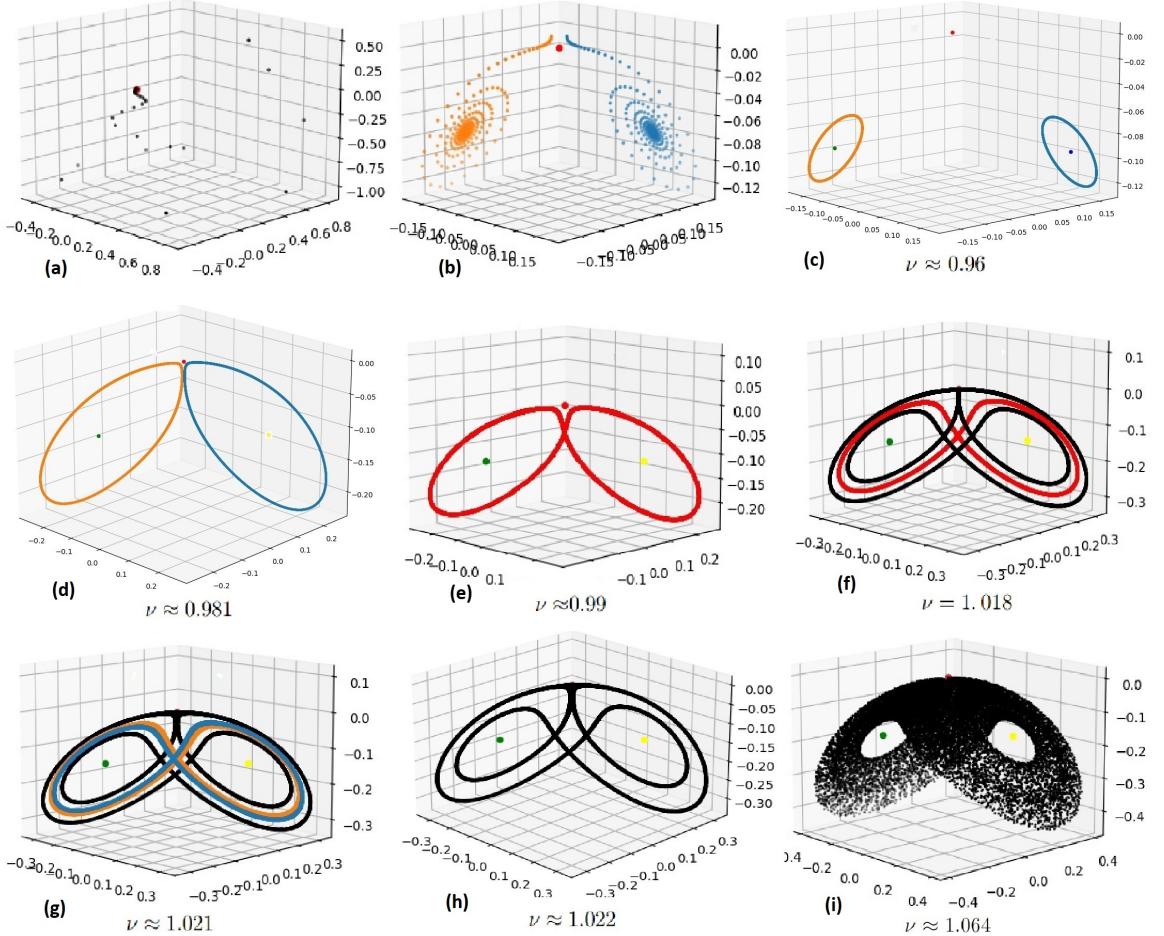


Рис. 3: Сценарий рождения аттрактора Лоренца вдоль маршрута $\nu_3 = 0.8$.

В данной работе мы сначала проводим двухпараметрический анализ на плоскости параметров (ν_2, ν_3) (ν_1 при этом выражается через зафиксированное значение J и ν_3 : $\nu_1 = -J/\nu_3$). Далее, мы на плоскости параметров (ν_2, ν_3) выявили маршрут $\nu_3 = 0.8$, вдоль которого рождается дискретный аттрактор Лоренца нового типа: в “дырках” этого аттрактора лежит не точка периода 2, как в классическом примере этого аттрактора, см., например, [2], а симметричная пара неподвижных точек. Фазовые портреты вдоль маршрута $\nu_3 = 0.8$ приведены на рисунке 3. Спер-

ва, аттрактором в отображении является симметричная неподвижная точка, рис. 3а, далее эта точка претерпевает суперкритическую бифуркацию вилка, рис. 3б. Вскоре родившаяся пара устойчивых неподвижных точек претерпевает бифуркацию Неймарка-Сакера, в результате которой в их окрестности рождаются устойчивые инвариантные кривые, рис. 3с. Далее у седловой симметричной неподвижной точки возникает гомоклиническая структура, напоминающая известную бифуркацию “восьмерка-бабочка”, рис. 3д. Важно отметить, что в момент этой бифуркации седловой индекс неподвижной точки ($\nu = \gamma\lambda$, где γ – неустойчивый мультиплликатор, а λ – устойчивый действительный мультиплликатор близайший к единичной окружности) меньше единицы, поэтому здесь мы имеем ситуацию, как на пути к рождению аттрактора Ровеллы, [5]. Здесь пара устойчивых инвариантных кривых влипает в гомоклиническую структуру, в результате чего, после расщепления инвариантных многообразий наружу, рождается симметричная двухходовая инвариантная кривая, рис. 3е. Далее на рассматриваемом маршруте мы переходим через единичный седловой индекс ($\nu = 1$), после чего, при возникновении двухходовой гомоклинической структуры “восьмерка-бабочка”, рис. 3ф, из нее рождается пара седловых инвариантных кривых. Аттрактор Лоренца рождается практически сразу после этой бифуркации, когда неустойчивое многообразие нулевой неподвижной точки ложится на устойчивое многообразие этих инвариантных кривых. При этом аттрактор Лоренца существует с симметричной двухходовой инвариантной кривой, рождающейся из одноходной восьмерки-бабочки, рис. 3г. При дальнейшем движении вдоль рассматриваемого маршрута симметричная пара седловых циклов влипает в этот устойчивый цикл (здесь происходит бифуркация вилка для инвариантных кривых) и аттрактор Лоренца становится единственным аттрактором в рассматриваемом отображении, рис. 3н. Данный аттрактор содержит т.н. лакуну, внутри которой лежит симметричная седловая инвариантная кривая (после бифуркации вилка) инвариантные многообразия которой не пересекаются. Далее, лакуна затягивается, и эта инвариантная кривая также становится частью аттрактора, рис. 3и.

Несмотря на то, что здесь мы рассматриваем отображение, бифуркации со-

проводящие рождения аттрактора Лоренца, а также соответствующие фазовые портреты свидетельствуют о том, что аналогичный сценарий рождения аттракторов Лоренца также может наблюдаться в потоковых системах. Подтверждением этого также является тот факт, что аттрактор Лоренца здесь рождается в некоторой окрестности неподвижной точки с триплетом мультиликаторов $(1, 1, 1)$, т.е. здесь можно провести теоретические исследования рождения аттракторов Лоренца и Ровеллы с применением теории нормальных форм. Также отметим, что начальный кусок сценария, характеризующийся рождением из гомоклинических бифуркаций симметричных устойчивых инвариантных кривых, может быть достаточно большим, до тех пор пока седловой индекс не перейдет через единицу.

Авторы работы благодарят С. В. Гонченко и А. О. Казакова за постановку задачи и ценные комментарии.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 19-71-10048.

- [1] Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // J. of the Atmospheric Sciences, 1963, v. 20. P. 130-141 [Перевод на русский язык: Лоренц Эдвард Н. Детерминированное непериодическое течение – в кн. Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 88-116]
- [2] Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I., Simo C., Turaev D. Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2005. – Т. 15. – №. 11. – С. 3493-3508.
- [3] Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П. К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений //Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2012. – Т. 8. – №. 1. – С. 3-28.
- [4] Gonchenko A. et al. Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2014. – Т. 24. – №. 08. – С. 1440005.

- [5] D.V. Lyubimov, M.A. Zaks - Lyubimov D. V., Zaks M. A. Two mechanisms of the transition to chaos in finite-dimensional models of convection //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1983. – T. 9. – №. 1-2. – C. 52-64.

Intelligence and consciousness in genetic-neuron astrocyte networks

A. Zaikin ^{1,2}

¹ *ITMM, Nizhny Novgorod State University, Russia*

² *University College London*

zaikin.alexey@gmail.com

Human brain has a very specific design as a result of a long evolution: a network of neurons linked in a very complex way is overlapped with a network of coupled astrocytes which are also linked to neurons. Additionally, inside each cell we have a very complicated network with ability to demonstrate intelligence properties. Naturally the research question arises how this design is related to the main feature of human brain, namely, ability to maintain a certain level of consciousness and awareness. To answer the question how quantify level of consciousness, recently the Integrated Information Theory of Consciousness has been developed, controversially claimed not only as a way to measure the complexity of brain but also its level of consciousness. Here I will report our results on a simple but realistic model of neuro-glial network and show that presence of astrocyte could contribute to the generation of positive Integrated Information and, hence, its evolutionary appearance was important to develop consciousness. Hence, astrocytes and genetic networks may contribute not only to the appearance of intelligence [1, 2, 3], but also consciousness [4, 5, 6].

The work was supported by the Russian Science Foundation (Grant No. 22-12-00216).

- [1] Y. Tsybina, I. Kastalskiy, M. Krivonosov, A. Zaikin, V. Kazantsev, A. Gorban, and S. Gordleeva, Astrocyte mediate analogous memory in a multi-layer neuron-astrocytic network, *Neural Computing and Applications* 34, 9147-9160 (2022).
- [2] Susan Gordleeva, Yulia A Tsybina, Mikhail I Krivonosov, Mikhail V Ivanchenko, Alexey A Zaikin, Victor B Kazantsev, Alexander N Gorban, Modelling working memory in spiking neuron network accompanied by astrocytes, *Frontiers in Cellular Neuroscience* 15, 631485 (2021).
- [3] L. Abrego, and A. Zaikin, TIntegrated Information as a Measure of Cognitive Processes in Coupled Genetic RepressilatorsY, *Entropy* 21(4), 382 (2019).
- [4] Luis Abrego, Susanna Gordleeva, Oleg Kanakov, Mikhail Krivonosov, Alexey Zaikin. Estimating integrated information in bidirectional neuron-astrocyte communication. *Physical Review E* 103, 022410 (2021).
- [5] O. Kanakov, S. Gordleeva, and A. Zaikin, Integrated Information in the Spiking-Bursting Stochastic Model, *Entropy* 22 (12), 1334 (2020).
- [6] O. Kanakov, S. Gordleeva, A. Ermolaeva, S. Jalan, A. Zaikin, *Astrocyte-induced positive integrated information in neuron-astrocyte ensembles*, *Physical Review E* 99, 012418 (2019).

Dynamical systems and Big synchronic data in biomedicine: pseudotime, bifurcations and principal graphs

A.Zinov'yev^{1,2}, A.N.Gorban^{1,3}, E.M.Mirkes^{1,3}

¹ *Laboratory of advanced methods for high-dimensional data analysis*

Lobachevsky University, Nizhny Novgorod, Russia

² *Computational Systems Biology of Cancer*

Institut Curie, PSL Research University, Paris, France

³ *Centre for Artificial Intelligence, Data Analytics and Modelling*

University of Leicester, Leicester, UK

andrei.zinov'yev@curie.fr

Thanks to the progress of modern biotechnologies, biological objects such as a cell, an organ or a whole organism can be characterized by molecular measurements, containing thousands and millions of variables. These measurements can help understanding and distinguishing normal biological processes and pathological deviations from norm such as cancer. In order to characterize the properties of complex dynamical systems underlying biological processes, one needs to collect such measurements over the time. Following and measuring the state of the same biological object in time is sometimes possible but remains difficult. In many situations it is easier to collect momentary measurements of many objects but in different states of the same dynamical process (so called synchronic data).

The question arises: can we apply an analogy with ergodic principle in the analysis of big synchronic data, and reconstruct the trajectories of the underlying dynamics without having explicit information about temporal labels? It appears possible in some situations.

A family of unsupervised machine learning methods called principal graphs allows one to model the geometry of a data point clouds as trajectories, and characterize the position of each object along them, using the notion of pseudotime. In particular, we've introduced a computationally efficient approach to principal graph construction called EIPiGraph, based on the concepts of elastic energy and topological grammars[1]. This approach was

proved successfull in the analysis of single cell molecular measurements in biology and medicine, through extracting cellular trajectories and their bifurcations, representing important fate decisions in the cell life[2]. The same approach was successfully used in order to extract the clinical trajectories of patients suffering from myocardial infarction, and prognosing the risk of developing complications some of which can be lethal[3].

The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Project No. 075-15-2021-634).

[1] Albergante L, Mirkes E, Bac J, et al. Entropy (Basel) 22(3):296 (2020)

[2] Chen H, Albergante L, Hsu JY et al. Nature Communications 10(1):1903 (2019)

[3] Golovenkin SE, Bac J, Chervov A et al. Gigascience 9(11):giaa128 (2020)

Countable products of chaotic homomorphism groups

N. I. Zhukova

HSE University,

nina.i.zhukova@yandex.ru

This is a joint work with A. G. Korotkov [1].

A group of homeomorphisms G of a topological space X is called chaotic (or G has chaotic behavior) on X if the following two conditions are met: 1) there exists everywhere a dense orbit of the group G in X (*the existence of a dense orbit*); 2) the union of closed orbits is dense in X (*the density of closed orbits*) [2].

If (X, d) is a metric space, then we define the notion of a sensitive dependence of the group G on the initial conditions. Relationships between a chaotic behavior and closely related properties of topological transitivity, sensitivity to initial conditions, density of closed orbits of homeomorphism groups and their countable products are investigated. We prove the following theorem which is one of the main results of our work.

Theorem Let G_i , $i \in \mathbb{N}$, be a family of homeomorphism groups of a metrizable topological space X_i , and on the Tychonoff product $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ the canonical action of the product of groups $G = \prod_{i \in \mathbb{N}} G_i$ is given. Then the group G acts chaotically on the product of X if and only if every group G_i acted chaotically on X_i , $i \in \mathbb{N}$.

Special attention is paid to countable group of homeomorphisms of a metrizable compact space X_i and their countable products.

Application to topological manifolds is considered. We construct numerous examples of chaotic groups of homeomorphisms of countable products of various metrizable topological spaces, including infinite-dimensional topological manifolds, whose factors can be as noncompact surfaces, so triangulable closed manifolds of an arbitrary dimension.

The work was supported by the Russian Science Foundation (Grant No. 22-21-00304).

- [1] N.I. Zhukova, A.G. Korotkov, ArXiv/ 4362502 [math. DS] 18 Jun. (2022).
- [2] Y.V. Bazaikin, A.S. Galaev and N.I. Zhukova, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 30 (2020).

Chaotic suspended foliations on three-dimensional manifolds

N.I. Zhukova¹, N.S. Tonysheva¹

¹ HSE University, Russia

nzhukova@hse.ru, nstonyshova@edu.hse.ru

We construct chaotic topological foliations on topological three-dimensional manifolds using the method of suspension. Recall that a leaf L of a foliation (M, F) is called closed if L is a closed subset of M . Follow to [1], we call a topological foliation (M, F) *chaotic* if there exists a dense leaf and the union of closed leaves is dense in M . Analogously, the chaotic behavior of a group of homeomorphisms is determined. These definitions can be considered as a generalization of chaotic dynamical systems in sense of Devaney [2]. In

the case of compact manifolds M the notion of chaotic topological foliations is coincided with the definition of chaos “in the absence of time” belonging to Churchill [3].

Let $\rho : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Homeo}(T)$ be a homomorphism of the fundamental group $\pi_1(B, b_0)$ of k -dimentional manifold B to the homomorphism group of a q -dimentional manifold T . A topological foliation (M, F) of codimention q , obtained by suspension of the homomorphism $\rho : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Homeo}(T)$, is called a *suspended foliation* and is denoted by $(M, F) = \text{Sus}(T, B, \rho)$.

We prove the following theorem.

Theorem 1. *A suspended foliation $(M, F) = \text{Sus}(T, B, \rho)$ is chaotic if and only if the group $\Psi := \rho(\pi_1(B, b_0))$ acts chaotically on the topological manifold T .*

The group Ψ defined in Theorem 1 is referred to as the *structural group* of the suspended foliation (M, F) . Thus, the investigation of the chaotic behavior of suspended foliations is reduced to the investigation of the chaotic behavior of their structural groups.

The structure of chaotic suspended foliations (M, F) on three-dimensional closed manifolds is studied. The base B of suspended foliation F may be only the circle \mathbb{S}^1 , and the transversal manifold T may be every closed surface. Therefore (M, F) has codimension two. Its structural group is isomorphic to the group \mathbb{Z} . The foliated manifold M is homeomorphic to the topological quotient manifold $(\mathbb{R} \times T)/\mathbb{Z}$.

We consider the category \mathfrak{Fol} of topological foliations. Isomorphisms in \mathfrak{Fol} of two foliations are homeomorphisms of the respective foliated manifolds which map leaves of one foliation onto leaves of another.

We define a family of chaotic homeomorphisms $\mathfrak{A} = \{g_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ of the standard sphere \mathbb{S}^2 having a common fixed point a such that the homeomorphisms g_m and g_n for different m, n are not topologically conjugated. This allowed us to prove the following statement.

Theorem 2. *Let g_m be a homeomorphism of the sphere \mathbb{S}^2 belonging to \mathfrak{A} and (M_m, F_m) is the foliation obtained by the suspension of the homomorphism*

$$\rho_m : \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \text{Homeo}(\mathbb{S}^2), \quad \rho_m(n) = (g_m)^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Then $\{(M_m, F_m) \mid m \in \mathbb{N}\}$ is a countable family of pairwise non isomorphic chaotic topological foliations on closed three-dimensional manifolds.

In the following theorem we use the introduced above notations.

Theorem 3. *Identify the plane \mathbb{R}^2 with $\mathbb{S}^2 \setminus \{a\}$. Let $h_m := g_m|_{\mathbb{S}^2 \setminus \{a\}}$, $m \in \mathbb{N}$, be the homeomorphism of the plane \mathbb{R}^2 , and (M_m, F_m) is a foliation obtained by the suspension of the group homomorphism*

$$\rho_m : \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \text{Homeo}(\mathbb{R}^2), \quad \rho_m(n) = (h_m)^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Then $\{(M_m, F_m) \mid m \in \mathbb{N}\}$ is a countable family of pairwise non isomorphic chaotic topological foliations, and every manifold M_m is a non compact Eilenberg-Maclean space of type $K(\mathbb{Z}, 1)$.

The work was supported by the Russian Science Foundation (Grant No. 22-21-00304).

- [1] Y.V. Bazaikin, A.S. Galaev, N.I. Zhukova, *Chaos in Cartan foliations*, Chaos, **30** (10), 1–9 (2020).
- [2] R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Menlo Park, CA (1986).
- [3] R. C. Churchill, *On defining chaos in absence of time*, in: Deterministic chaos in general relativity, eds. Hobill D., Burd A., Coley. A. NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., **332**, 107–112 (1994).